Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Řepík

Tenzorové součiny vektorových prostorů

Tensor Products of Vector Spaces

Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.
Studijní program:	Specializace v pedagogice
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání – jednooborové studium

Praha 2014

Děkuji vedoucímu bakalářské práce panu RNDr. Antonínu Jančaříkovi, Ph.D., za konzultace, cenné připomínky a čas strávený čtením tohoto textu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Antonína Jančaříka, Ph.D., a s použitím odborné literatury a dalších pramenů uvedených v seznamu použité literatury, pramenů a informačních zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne ....

Michal Řepík

Název práce:	Tenzorové součiny vektorových prostorů
Autor:	Michal Řepík
Katedra:	Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Vedoucí práce:	RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.
Abstrakt:	Předkládaná bakalářská práce s názvem Tenzorové součiny vektorových prostorů se zabývá obecnou konstrukcí tenzorového součinu dvou vektorových prostorů nad stejným tělesem pomocí konceptu linearizace bilineárního zobrazení. Tato konstrukce je doplněna diskuzí nad přístupy alternativními a je rozšířena na konečný systém vektorových prostorů nad stejným tělesem. V práci je definován tenzor typu (p, q) několika způsoby, které spolu navzájem souvisejí. V neposlední řadě jsou v textu zavedeny základní operace s tenzory. Práce rovněž podává stručný přehled historického vývoje tenzorového počtu.
Klíčová slova:	Tenzorový součin, tenzor, bilineární zobrazení, formální lineární obal, faktorový prostor, matice přechodu.

Title:	Tensor Products of Vector Spaces
Author:	Michal Řepík
Department:	Department of Mathematics and Mathematical Education
Supervisor:	RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.
Abstract:	The submitted bachelor thesis called Tensor Products of Vector Spaces deals with general construction of tensor product of two vector spaces over the same field using the technique of linearisation of bilinear maps. This construction is supplemented by a discussion on its alternative ways, and a tensor product of a finite system of vector spaces over the same field is added. The paper also defines a (p, q) tensor in various interconnected ways. Basic operations with tensors are also introduced. The thesis offers a short historical review of tensor calculus as well.
Key words:	Tensor product, tensor, bilinear map, free vector space, quotient space, change-to-base matrix.

Obsah

Úvod

Předkládaná bakalářská práce se zabývá tenzorovými součiny vektorových prostorů nad algebraickým komutativním tělesem $\mathbb{K}$ charakteristiky 0. V rámci textu budou studovány především vektorové prostory konečné dimenze, avšak podstatné úvahy budeme provádět pro vektorové prostory zcela obecné.

Formulujme hlavní cíle bakalářského projektu do několika bodů.

(1) Zavést tenzorový součin vektorových prostorů pomocí konceptu linearizace bilineárního zobrazení a provést jeho obecnou konstrukci a diskutovat konstrukce alternativní. Tenzorový součin následně generalizovat na konečný systém vektorových prostorů nad stejným tělesem.

(2) Definovat pojem tenzor typu (p, q), popsat různé definice tenzoru a ukázat, jak spolu vzájemně souvisejí.

(3) Zavést základní operace s tenzory. Mezi ty řadíme sčítání tenzorů, násobení tenzoru skalárem, násobení tenzorů mezi sebou a kontrakce tenzoru.

(4) Podat stručný přehled historického vývoje tenzorového počtu.

Společně s hlavními cíli bakalářské práce můžeme neformálně vytyčit i cíle vedlejší, které tyto synergicky doplňují a které vycházejí ze skutečnosti, že práce byla řešena na půdě Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Máme tím na mysli především vytvoření takového textu, který bude možno využít jako pomocný studijní materiál při výuce lineární algebry na některých typech vysokých škol.

Na dalších řádcích si pojďme stručně představit obsah předkládané práce. Bakalářská práce *Tenzorové součiny vektorových prostorů* je rozdělena do čtyř kapitol.

1 Historický vývoj tenzorového počtu. Popsat historický vývoj tenzorového počtu není primárním cílem bakalářské práce. Studované téma zde řešíme jako problém matematický, nikoli historický, a proto se v první kapitole seznámíme pouze se zásadními mezníky v éře vývoje tenzorové algebry a analýzy. Zaměříme se především na první výskyt pojmu tenzor v matematice, období, kdy se tenzorový počet stal hlavním matematickým aparátem fyziky 20. století, a konečně na první zmínky o tenzorovém součinu Abelových grup.

2 Algebraický úvod do studia tenzorového počtu. Ve druhé kapitole se čtenář seznámí se základními algebraickými pojmy, které se používají při studiu tenzorových součinů vektorových prostorů. Zařazení kapitoly do bakalářské práce slouží především pro připomenutí stěžejních partií lineární algebry (nutné pro následné studium tenzorového počtu) a ujednocení značení, které je kvůli rozmanitosti dostupné literatury nejednotné. Podrobně je v kapitole zpracována problematika faktorových prostorů a formálních lineárních obalů.

3 Tenzorové součiny vektorových prostorů. Zavádění tenzorů do matematiky je možné několika způsoby, které spolu navzájem koincidují. Tenzorem budeme rozumět prvek tenzorového součinu vektorových prostorů. Tenzorový součin vybudujeme mezi dvěma vektorovými prostory při studiu konceptu linearizace bilineárního zobrazení. Zvlášť zde budeme dokazovat existenci a jednoznačnost tenzorového součinu vektorových prostorů konečné dimenze a prostorů, které konečné dimenze být nemusejí. Na závěr zavedeme základní početní operace s tenzory.

4 Tenzory v souřadnicích. Kapitola je zaměřena na odvození analytické definice tenzoru z definice popsané ve třetí kapitole. V úvodu budou připomenuta pravidla pro transformaci souřadnic vektorů a lineárních forem, která budou zobecněna pro transformaci souřadnic libovolného tenzoru.

Čtenář přistupující k četbě této práce by měl být důkladně obeznámen se základy lineární algebry, především s teorií vektorových prostorů a lineárních zobrazení.

Pro zvýšení přehlednosti textu jsou definicevěty na levém okraji stránky zvýrazněny svislým pruhem.

U definic a vět, které jsou přebírány z jiných publikací, je za jejich označením odkaz na příslušný zdroj. Takové věty a definice, které jsou přebírány z cizojazyčné literatury, nejsou uváděny v originálním znění, nýbrž jsou přeloženy do češtiny a značení je přizpůsobeno charakteru práce.

KAPITOLA 1

Historický vývoj tenzorového počtu

První použití pojmu *tenzor* bývá připisováno Rowanu Hamiltonovi (1805-1865), který termínu užil ve svých přednáškách o kvaternionech pronesených ve 40. letech 19. století. Společně s pojmy *transtenzor* a *protenzor* jej následně uvedl v práci *Lectures on Quaternions* v roce 1853. Autor ve své práci [**1**, s. 57] píše:

> *…factors …, may naturally, in consistency with the plan of nomenclature employed in these Lectures, receive the general name of* TENSORS.

Nutno však poznamenat, že Hamiltonovo pojetí tenzoru je odlišné od představy současné matematiky [**2**, s. 17].

Roku 1844 Hermann Grassmann (1809-1877), profesor matematiky na gymnáziu ve Štětíně, publikoval práci s názvem *Die Lineale Ausdehnungslehre*, která byla po více jak dvacet let zanedbávána pro příliš abstraktní a filozofický jazyk, jímž byla psána. Druhé vydání Grassmannovy teorie z roku 1862 bylo více čitelné a možná právě proto přispělo k rozvoji Cliffordových algeber, vektorové analýzy, lineární algebry a dalších matematických oborů. Grassmann v něm mimo jiného zavedl *vnější součin* dvou vektorů a také způsob násobení vektorů v literatuře označovaný jako *indeterminate product* (viz [**3**, s. 5]).

Nezanedbatelnou roli ve vývoji tenzorového počtu zaujímá americký matematik, teoretický fyzik a chemik Josiah Willard Gibbs (1839-1903). Svoji publikaci z roku 1884 nazvanou *Elements of Vector Analysis* uvádí následujícími slovy:

> *The fundamental principles of the following analysis are such as are familiar under a slightly different form to students of quaternions. The manner in which the subject is developed is somewhat different from that followed in treatises on quaternions since the object of the writer does not require any use of the conception of the quaternion, being simply to give a suitable notation for those relations between vectors, or between vectors and scalars, …*[**4**, s. 1] ([1])

[1]Volný překlad: *Základní principy následující analýzy se mohou v mírně odlišné formě zdát známé studentům kvaternionů. Nicméně způsob, jakým je předmět práce rozvíjen, se poněkud odlišuje od způsobu zavedeného v pracích o kvaternionech; záměr autora nevyžaduje užití představy kvaternionu jako takové, ale spíše si autor půjčuje již ustavený a vhodný způsob zápisu vztahů mezi dvěma vektory, či vektorem a skalárem.*

Z textu je patrné, že autor navazuje na Hamiltonovu práci o kvaternionech. Samotné kvaterniony ovšem ve své práci nepoužívá, přebírá pouze zavedená značení.

Ve stejné knize zavádí ve třetí kapitole s názvem *Concerning linear vector functions* pojem *dyáda* jako zobecňující pojem součinu dvou vektorů. V téže kapitole uvádí:

> *. . . we may regard the dyad as the most general form of product of two vectors. We shall call it the indeterminate product* [**4**]. ([2])

Z úryvku vidíme, že Gibbs se ve své práci rovněž inspiroval u Grassmanna.

Pojem dyáda, který bychom dnes podle [**3**, s. 5] označili jako tenzorový součin dvou vektorů, se používal teoretickými fyziky do doby, než jej nahradila mnohem obecnější teorie.

V roce 1901 Gibbsův bývalý student Edwin Bidwell Wilson publikuje na základě Gibbsových přednášek první oficiálně vydanou učebnici moderní vektorové analýzy v angličtině s názvem *Vector Analysis: A Text Book for the Use of Students of Mathematics and Physics and Founded upon the Lectures of J. Willard Gibbs* (viz [**6**]).

Důležitým mezikrokem v historii tenzorového počtu byla práce německého fyzika Woldemara Voigta (1850-1919), jejíž význam je přehledně shrnut v následujícím úryvku:

> *In 1898, the crystallographer Woldemar Voigt introduced tensors (as he called them) as magnitudes which were at first related to stress and strain. These tensors were offsprings of vector calculus. In his early works Voigt only used symmetric tensors of the second order, located in three-dimensional Euclidean space, but later he introduced symmetrical tensors of the nth order.* [**7**, s. 338] ([3])

Voigt zavedl tenzory (z latinského „tensio“–napětí) v práci *Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle in elementarer Darstellung* [**2**, s. 17].

Vznikající tenzorový počet se stal hlavním matematickým nástrojem Einsteinovy obecné teorie relativity. Matematický aparát vhodný k formulaci nové teorie ležel připraven v diferenciální geometrii vybudované B. Riemannem, E. B. Christoffelem, G. Riccim a T. Levi-Civitou [**8**, s. 15].

V pracích vznikajících mezi lety 1886-1901 vytvořil italský matematik Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) nový matematický aparát, který nazval *absolutní diferenciální počet.*

---

[2] Podle [**5**, s. 2] je *indeterminate product* tenzorovým součinem vektorů z prostoru $\mathbb{R}^3$.

[3] Volný překlad: *V roce 1898 krystalograf Woldemar Voigt zavedl tenzory jako označení pro veličiny, které popisovaly napětí v tahu a tlaku (v krystalových mřížích). Tyto tenzory přímo navazovaly na poznatky vektorového počtu. Ve svých raných pracích Voigt užíval pouze symetrické tenzory druhého řádu ve třídimenzionálním eukleidovském prostoru, ale později se zabýval i symetrickými tenzory n-tého řádu.*

Klíčové objevy v této oblasti vykonal jeho student z univerzity v Padově Tullio Levi-Civita (1873-1941), který s Riccim spolupracoval na několika stěžejních publikacích. Nejvýznamnější společnou prací byla v roce 1901 *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs aplications*, ve které Ricci a Levi-Civita položili základy tenzorové analýzy. Autoři se v textu několikrát odkazují na práci *Ueber die Transformation homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades* vydanou roku 1869, jejímž autorem je výše uvedený Elwin Bruno Christoffel (1829-1900). Levi-Civita také zavedl důležitou symboliku tenzorového počtu [**9**, s. 11]. Je třeba poznamenat, že v práci [**10**] autoři neužívají pojmu tenzor ale systém („système“).

V roce 1911, kdy Albert Einstein hledal vhodnější matematický aparát k popisu své teorie, poukázal jeho kolega z Prahy Georg Pick na Ricciho absolutní diferenciální počet [**11**, s. 267]. To byl zcela zásadní krok. Při studiu Ricciho a Levi-Civitova díla interpretovali Einstein a jeho přítel Marcel Grossmann absolutní diferenciální počet jako zobecněnou vektorovou analýzu. Právě oni rozeznali, že Ricciho počet v sobě zahrnuje vektory i Voigtovy tenzory [**7**, s. 339].

V moderní éře v historii lineární a multilineární algebry umožnila axiomatická metoda vzájemně oddělit pojmy a koncepce, které do té doby byly neoddělitelně pospojované.

Například až v roce 1888 v práci *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* předložil italský matematik Giuseppe Peano axiomatickou definici reálného vektorového prostoru společně s lineárními zobrazeními mezi vektorovými prostory [**12**, s. 66].

Pro teorii tenzorových součinů vektorových prostorů měl tento vývoj lineární algebry na přelomu 19. a 20. století velký vliv. Etablovaly se pojmy jako bilineární a multilineární zobrazení nebo duální vektorové prostory. Rozvoj moderní multilineární algebry byl v rukou jak algebraiků, kterými v té době byli například Emmy Noetherová, Emil Artin nebo Helmut Hasse, tak topologů, mezi kterými vzpomeňme na Lva Pontrjagina a Hasslera Whitneyho. Více o historii lineární a multilineární algebry čtenář nalezne v publikacích [**12**], [**13**] nebo [**14**].

Až do roku 1938 byla operace tenzorový součin známá pouze nepřímo ve speciálních případech (tenzorový součin byl především chápán jako operace na vektorech). V tomto roce publikoval již zmiňovaný Hassler Whitney (1907-1989) článek s názvem *Tensor products of Abelian Groups*, ve kterém objevil konstrukci tenzorového součinu Abelových grup (a modulů) (viz [**15**]).

O pár let později Bourbakiho práce o algebře obsahovala definici tenzorového součinu modulů ve tvaru, který je dodnes používán.

Nicolas Bourbaki je pseudonym skupiny mladých francouzských matematiků založené v roce 1935. Mezi zakládající členy patřili například Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné a André Weil (viz [**16**]). Skupina dodnes působí v Paříži na *École normale supérieure* pod oficiálním názvem *Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki.*

Ovlivněni do značné míry soudobou německou matematikou, rozhodli se bourbakisté vystavět veškerou matematickou teorii znovu prostřednictvím axiomatické metody, a to na základě teorie množin. Původně se zamýšleli zaměřit pouze na matematickou analýzu; brzy se však ukázalo, že tento plán vyžaduje práci s celým systémem matematiky. Problém rozdělení matematiky na podobory vyřešili radikálně. Pojmy jako geometrie, algebra nebo analýza znamenaly pro bourbakisty zastaralé vymezení oblastí zkoumání, které se rozhodli nahradit novým konceptem dělení.

Této představě budování celé matematiky od jednodušších pojmů ke složitějším odpovídá i návaznost jednotlivých knih Bourbakiho série *Elements of Mathematics* (*Éléments de mathématique*). Tu tvoří postupně publikace: *Theory of Sets*, *Algebra*, *General Topology*, *Functions of a Real Variable*, *Topological Vector Spaces*, *Integration*, *Lie Groups and Lie Algebras*, *Commutative Algebra*, *Spectral Theory.* Blíže viz [**17**, s. 148-152].

První svazek edice vyšel v roce 1939 ve Francii. Titul s názvem *Algebra*, který již obsahuje definici tenzorového součinu modulů, byl publikován o čtyři roky později. Vydání z roku 1943 bylo přeloženo do několika světových jazyků; v práci vycházíme z anglického překladu [**18**] z roku 1989.

Bourbaki nejprve definuje tenzorový součin dvou modulů, který aplikuje na řešení problému linearizace bilineárního zobrazení. K zavedení pojmu tenzorový součin lze však přistupovat i z opačného konce. A to tak, že tenzorový součin zavedeme v rámci řešení problému linearizace bilineárního zobrazení.

Takto lze postupovat i v případě zavádění tenzorového součinu vektorových prostorů, podobně jako to činí autoři publikací [**19**] a [**20**] a jak to bude provedeno v následujících kapitolách.

KAPITOLA 2

Algebraický úvod do studia tenzorového počtu

Algebraickou teorii tenzorových součinů vektorových prostorů začneme budovat zavedením základního pojmového aparátu lineární algebry. Vzhledem k rozsahu práce zde stručně shrneme látku *lineárních*, *bilineárních* a *multilineárních zobrazení*. Záměrně rozlišíme bilineární zobrazení od speciálního případu multilineárního zobrazení, protože tenzorový součin budeme konstruovat mezi dvěma vektorovými prostory.

Dále v této kapitole zavedeme pojmem *duálního vektorového prostoru*.

Podrobněji se zaměříme na studium *faktorových prostorů*, které jsou pro formální konstrukci tenzorového součinu vektorových prostorů podstatné.

Nakonec se budeme zabývat technikou vytvoření vektorového prostoru nad libovolnou neprázdnou množinou. V knize [**21**, s. 296] označují její autoři takto vzniklý vektorový prostor jako *formální lineární obal*, a proto se tohoto označení přidržíme i zde. V zahraniční literatuře ([**19**, s. 9], [**22**, s. 13-14]) nalezneme označení *free vector space*.

V celé práci budeme pracovat v komutativním tělese $\mathbb{K}$ charakteristiky 0. Připomeňme, že těleso $\mathbb{K}$ má charakteristiku rovnu 0, jestliže se součet $1 + \ldots + 1 = n \cdot 1$ nerovná 0 pro libovolné $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, přičemž 1 značí jednotkový prvek tělesa $\mathbb{K}$. Těleso racionálních čísel $\mathbb{Q}$, těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ a těleso komplexních čísel $\mathbb{C}$ jsou příklady algebraických těles s charakteristikou 0.

1. Lineární, bilineární a multilineární zobrazení

V první části kapitoly si připomeneme základní informace o lineárním zobrazení, které rozšíříme o pojem bilineárního zobrazení. Protože teorie lineárních zobrazení neboli *homomorfismů* tvoří základní partii lineární algebry a lze ji tak studovat z nepřeberného množství pramenů, zopakujeme zde pouze definici a základní názvosloví.

1.1. Lineární zobrazení.

Definice 1 (Lineární zobrazení)**.** Nechť $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$. Zobrazení $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$ do prostoru $\mathcal{W}$ se nazývá *lineární* (*homomorfismus*), jestliže $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ platí

$$f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}), \tag{2.1}$$

$$f(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda f(\boldsymbol{u}). \tag{2.2}$$

Lineární zobrazení, které je prosté (*injektivní*), nazýváme *monomorfismus.* Homomorfismus, který je „na“ (*surjektivní*), označujeme jako *epimorfismus.* Vzájemně jednoznačné lineární zobrazení, tedy zobrazení, které je současně monomorfismem a epimorfismem, nazýváme *izomorfismus.* O vektorových prostorech $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ nad tělese $\mathbb{K}$ řekneme, že jsou *izomorfní* právě tehdy, když mezi nimi existuje izomorfismus. Tuto skutečnost zapisujeme $\mathcal{V} \simeq \mathcal{W}$. Lineární zobrazení, jehož zdrojový i cílový prostor je stejný, označujeme jako *endomorfismus.* Endomorfismus, který je zároveň izomorfismem, označujeme jako *automorfismus.*

Jestliže $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$, pak lineární zobrazení $\mathbb{1}_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ definované pro všechny vektory $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ předpisem $\mathbb{1}_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ označujeme jako *identický automorfismus* na prostoru $\mathcal{V}$.

Jádrem lineárního zobrazení $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, kde $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$, nazýváme množinu $\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}; f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}\}$.

Obrazem lineárního zobrazení $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, kde $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$, nazýváme množinu $\operatorname{Im} f = \{\boldsymbol{w} \in \mathcal{W}; \exists \boldsymbol{v} \in \mathcal{V} : f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}\}$.

Jádro $\operatorname{Ker} f$ lineárního zobrazení $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ je vektorovým podprostorem prostoru $\mathcal{V}$, obraz $\operatorname{Im} f$ je vektorovým podprostorem prostoru $\mathcal{W}$.

Pro dvě lineární zobrazení $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ a $g : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ definujeme operace sčítání zobrazení a násobení zobrazení skalárem z tělesa $\mathbb{K}$ předpisy

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V} : \qquad (f + g)(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v}), \tag{2.3}$$

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \qquad (\lambda f)(\boldsymbol{v}) = \lambda f(\boldsymbol{v}). \tag{2.4}$$

Množina všech lineárních zobrazení z prostoru $\mathcal{V}$ do vektorového prostoru $\mathcal{W}$ spolu s operacemi sčítání lineárních zobrazení a násobení lineárního zobrazení skalárem, které jsou definovány rovnicemi (2.3) a (2.4), tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$, který označujeme jako $\operatorname{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.

1.1.1. *Tvrzení vztahující se k lineárním zobrazením.* Na dalších řádcích uvedeme některá důležitá tvrzení, která se vztahují k látce lineárních zobrazení, a která později explicitně či implicitně využijeme při důkazech některých vět. Lemmata nebudeme dokazovat a na jejich důkazy se odvoláme do pramenů, ze kterých jsou přejímány.

Lemma 1. [**23**, s. 107] *Nechť $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$. Každý homomorfismus prostoru $\mathcal{V}$ do prostoru $\mathcal{W}$ je určen obrazy vektorů libovolně zvolené báze prostoru $\mathcal{W}$.*

Lemma 2. [**24**, s. 93] *Buď $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ homomorfismus vektorových prostorů $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ nad tělesem $\mathbb{K}$. Potom f je izomorfismus právě tehdy, když existuje homomorfismus $g : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ takový, že $g \circ f = \mathbb{1}_{\mathcal{V}}$ a $f \circ g = \mathbb{1}_{\mathcal{W}}$. Přitom je g izomorfismus a izomorfismem f je určen jednoznačně.*

Lemma 3. [**25**, s. 33] *Každé dva prostory (nad týmž tělesem) stejné dimenze n jsou navzájem izomorfní.*

1.2. Bilineární zobrazení. V tomto paragrafu se zaměříme na studium tzv. *bilineárních zobrazení.* Začněme definicí.

Definice 2 (Bilineární zobrazení)**.** Nechť $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ a $\mathcal{U}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$. Zobrazení $f : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \to \mathcal{U}$ nazýváme *bilineární*, jestliže $\forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$, $\forall \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w} \in \mathcal{W}$, $\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$ platí

$$f(\mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) = \mu_1 f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) + \mu_2 f(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}), \tag{2.5}$$

$$f(\boldsymbol{v}, \mu_1 \boldsymbol{w}_1 + \mu_2 \boldsymbol{w}_2) = \mu_1 f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1) + \mu_2 f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2). \tag{2.6}$$

V části 1.1 jsme definovali obraz lineárního zobrazení. Podobným způsobem můžeme definovat i obraz zobrazení bilineárního. Obraz $\operatorname{Im} f$ zobrazení $f : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \to \mathcal{U}$ (bilineárního) obecně netvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{U}$. Tuto skutečnost si demonstrujme na příkladu, který můžeme nalézt v publikaci [**19**, s. 1]. Jádro $\operatorname{Ker} f$ bilineárního zobrazení f nedefinujeme.

Příklad 1. Nechť $\mathcal{V}$ a $\mathcal{U}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$, přičemž $\dim \mathcal{V} = 2$ a $\dim \mathcal{U} = 4$. Množina $\mathcal{M} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ je báze prostoru $\mathcal{V}$, množina $\mathcal{N} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ je báze prostoru $\mathcal{U}$. Dále buď $f : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ bilineární zobrazení definované předpisem

$$f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \alpha^1 \beta^1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha^1 \beta^2 \boldsymbol{u}_2 + \alpha^2 \beta^1 \boldsymbol{u}_3 + \alpha^2 \beta^2 \boldsymbol{u}_4,$$

kde $\boldsymbol{v} = \alpha^1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha^2 \boldsymbol{v}_2$ a $\boldsymbol{w} = \beta^1 \boldsymbol{v}_1 + \beta^2 \boldsymbol{v}_2$. ([1])

Jestliže vektor $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ je prvkem množiny $\operatorname{Im} f$, potom pro koeficienty $\gamma^1, \ldots, \gamma^4 \in \mathbb{K}$ lineární kombinace $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{4} \gamma^i \boldsymbol{u}_i$ platí $\gamma^1 = \alpha^1 \beta^1$, $\gamma^2 = \alpha^1 \beta^2$, $\gamma^3 = \alpha^2 \beta^1$ a konečně $\gamma^4 = \alpha^2 \beta^2$. Odtud dostáváme rovnost

$$\gamma^1 \gamma^4 - \gamma^2 \gamma^3 = 0,$$

pomocí které rozhodneme, zda libovolně zvolený vektor z prostoru $\mathcal{U}$ leží v obrazu bilineárního zobrazení $\operatorname{Im} f$.

Pro vektory $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4$ a $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3$ je podmínka splněna, avšak pro vektor $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_4$ nikoli. Množina $\operatorname{Im} f$ tudíž netvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{U}$.

[1] Všimněme si, že souřadnice vektorů značíme indexy nahoře. Důvod zavedení této konvence vyplyne na straně 16.

Pro dvě bilineární zobrazení $f, g : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \to \mathcal{U}$ definujeme jejich součet a násobení skalárem z tělesa $\mathbb{K}$ předpisy

$$\forall(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W} : \qquad (f+g)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \tag{2.7}$$

$$\forall(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}, \forall\lambda \in \mathbb{K} : \qquad (\lambda f)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \lambda f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}). \tag{2.8}$$

Množina všech bilineárních zobrazení z kartézského součinu $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ do vektorového prostoru $\mathcal{U}$ s takto zavedenými operacemi (2.7) a (2.8) tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$, který značíme $\mathscr{L}(\mathcal{V} \times \mathcal{W}, \mathcal{U})$.

1.3. Multilineární zobrazení. Rozšířením na kartézský součin n vektorových prostorů dostáváme n-lineární nebo též *multilineární* zobrazení.

Definice 3 (Multilineární zobrazení)**.** Nechť $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n, \mathcal{W}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$. Zobrazení $f : \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \ldots \times \mathcal{V}_n \to \mathcal{W}$ nazýváme *multilineární*, jestliže pro libovolný výběr vektorů $\boldsymbol{v}_1 \in \mathcal{V}_1, \dots, \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{u}_i \in \mathcal{V}_i, \dots, \boldsymbol{v}_n \in \mathcal{V}_n$ a libovolný výběr skalárů $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$ platí

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \mu_1 \boldsymbol{u}_i + \mu_2 \boldsymbol{v}_i, \dots, \boldsymbol{v}_n) &= \\ &= \mu_1 f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{u}_i, \dots, \boldsymbol{v}_n) + \mu_2 f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_i, \dots, \boldsymbol{v}_n), \end{aligned} \tag{2.9}$$

kde $i = 1, \dots, n$.

Podobným způsobem jako v části 1.2 definujeme na množině $\mathscr{L}(\mathcal{V}_1 \times \ldots \times \mathcal{V}_n, \mathcal{W})$ všech n-lineárních zobrazení lineární strukturu předpisy

$$(f+g)(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n) = f(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n) + g(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n), \tag{2.10}$$

$$(\lambda f)(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n) = \lambda f(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n), \tag{2.11}$$

kde $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n) \in \mathcal{V}_1 \times \ldots \times \mathcal{V}_n$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Množina $\mathscr{L}(\mathcal{V}_1 \times \ldots \times \mathcal{V}_n, \mathcal{W})$ s operacemi (2.10) a (2.11) tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$.

2. Duální vektorové prostory

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$. Lineární zobrazení z prostoru $\mathcal{V}$ do aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{K}$ se nazývají *lineární formy* na $\mathcal{V}$ (*kovektory*).

Vektorový prostor všech lineárních forem se nazývá *duální vektorový prostor k prostoru* $\mathcal{V}$ a označuje se

$$\mathcal{V}^* = \operatorname{Hom}(\mathcal{V}, \mathbb{K}).$$

Poznámka 1. Nechť $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$. Bilineární zobrazení z kartézského součinu $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ do aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{K}$ nazýváme *bilineární formy*.

Podobně, jsou-li $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_n$ vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$, pak n-lineární zobrazení z kartézského součinu $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \ldots \times \mathcal{V}_n$ do aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{K}$ nazýváme *multilineární (n-lineární) formy.*

Lemma 4 (O duální bázi)**.** [**26**, s. 35] *Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$. Označme $\mathcal{M} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ jeho bázi. Potom v duálním prostoru $\mathcal{V}^*$ existuje báze $\mathcal{M}^* = \{f^1, f^2, \ldots, f^n\}$, pro kterou platí*

$$f^i(\boldsymbol{v}_j) = \begin{cases} 1 & \textit{pro } i = j, \\ 0 & \textit{pro } i \neq j. \end{cases} \tag{2.12}$$

Tato báze se nazývá duální báze *k bázi $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$.*

Poznámka 2. Uvažujme vektorový prostor $\mathcal{V}$, ve kterém zvolme bázi $\mathcal{M} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$.

Jestliže f je lineární forma z duálního vektorového prostoru $\mathcal{V}^*$, ve kterém podle lemmatu 4 existuje duální báze $\mathcal{M}^* = \{f^1, \ldots, f^n\}$, potom existují prvky $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ takové, že $f = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f^i$. Koeficienty této lineární kombinace nazýváme *souřadnicemi* lineární formy vzhledem k bázi $\mathcal{M}^*$.

V literatuře bývá často zvykem souřadnice lineárních forem značit dolními indexy a prvky samotné báze indexy horními. Souřadnice vektorů v prostoru $\mathcal{V}$ značit horními indexy a vektory v bázi označovat indexy dolními. Popsané konvence se přidržíme i v této práci.

Poznámka 3. Vektory v $\mathbb{K}^n$ považujeme za n-tice skalárů z tělesa $\mathbb{K}$ ve formě sloupců. Duální prostor $(\mathbb{K}^n)^*$ si můžeme představit jako n-tice skalárů z tělesa $\mathbb{K}$ ve formě řádků [**26**, s. 36]. Tedy například

$$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix}, \quad f \in (\mathbb{R}^3)^*, \quad f = (\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

Poznámka 4 (Kroneckerův symbol δ^i_j). Na tomto místě zaveďme tzv. *Kroneckerův symbol* předpisem

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases} \tag{2.13}$$

Všimněme si, že podmínka (2.12) v lemmatu 4 lze s použitím Kroneckerova symbolu zapsat ve tvaru $f^i(\boldsymbol{v}_j) = \delta^i_j$.

Díky Kroneckerovu symbolu můžeme rovněž jednoduše zapsat jednotkou matici $\boldsymbol{E}$. Platí $\boldsymbol{E} = (\delta^i_j)$, kde i značí řádkový index; j je sloupcový index.

Definice 4 (Kanonické zobrazení)**.** [**23**, s. 308] Zobrazení Φ prostoru $\mathcal{V}$ do prostoru $\mathcal{V}^{**}$, které vektoru $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ přiřadí lineární formu $\widehat{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{V}^{**}$ na prostoru $\mathcal{V}^{*}$, která každé formě $f \in \mathcal{V}^{*}$ přiřazuje skalár

$$\widehat{\boldsymbol{v}}(f) = f(\boldsymbol{v}),$$

se nazývá *kanonické.*

Lemma 5. [**23**, s. 308] *Kanonické zobrazení Φ prostoru $\mathcal{V}$ do prostoru $\mathcal{V}^{**}$ je monomorfismus.*

Lemma 6. [**23**, s. 308] *Kanonické zobrazení Φ prostoru $\mathcal{V}$ do prostoru $\mathcal{V}^{**}$ je izomorfismus právě tehdy, když má prostor $\mathcal{V}$ konečnou dimenzi.*

Z lemmatu 6 plyne, že vektorový prostor $\mathcal{V}$ konečné dimenze je kanonicky izomorfní s prostorem $\mathcal{V}^{**}$. Píšeme $\mathcal{V} \simeq \mathcal{V}^{**}$. Někdy bývá zobrazení Φ nazýváno *kanonickým izomorfismem.* Ten nám umožňuje ztotožnit prvky $\mathcal{V}$ (vektory) a $\mathcal{V}^{**}$ („ko-kovektory“) a v jistém smyslu vyhlásit rovnoprávnost vektorů a kovektorů. Kovektor je zobrazení na vektorech, vektor je zobrazení na kovektorech [**27**, s. 6].

3. Faktorové prostory

Podkapitolu zahájíme krátkým motivačním úryvkem.

> *Koncept faktorobjektu se objevuje v celé strukturní matematice, s větším či menším významem. Zcela zásadní význam má pro algebru. Myšlenka je následující: vyrobme z jemného objektu hrubší objekt tak, že některé prvky budeme považovat za totožné. Jako bychom se na objekt podívali zdálky a místo jednotlivých prvků začali vidět obláčky navzájem nerozlišitelných prvků. Na faktorobjekt pak přetáhneme strukturu objektu původního.* [**28**, s. 120]

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$ a $\mathcal{W}$ jeho podprostor. Řekneme, že vektory $\boldsymbol{v}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$ z prostoru $\mathcal{V}$ jsou v relaci $\mathfrak{R}$ právě tehdy, když $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \in \mathcal{W}$.

Je snadné se přesvědčit, že takto zavedená relace $\mathfrak{R}$ na množině $\mathcal{V}$ je *ekvivalence* [**29**, s. 254]. Existuje tudíž rozklad množiny $\mathcal{V}$ na třídy podle ekvivalence $\mathfrak{R}$ [**30**, s. 44]. Třída ekvivalence obsahující vektor $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ je množina

$$[\boldsymbol{v}] := \boldsymbol{v} + \mathcal{W} = \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}; \boldsymbol{w} \in \mathcal{W}\}. \tag{2.14}$$

Množinu všech tříd ekvivalence označujeme $\mathcal{V}/\mathcal{W}$. Na množině $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ definujme sčítání a násobení skalárem z tělesa $\mathbb{K}$ předpisy

$$\forall [\boldsymbol{u}], [\boldsymbol{v}] \in \mathcal{V}/\mathcal{W}: \qquad [\boldsymbol{u}] + [\boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}], \tag{2.15}$$

$$\forall [\boldsymbol{u}] \in \mathcal{V}/\mathcal{W}, \forall \alpha \in \mathbb{K}: \qquad \alpha[\boldsymbol{u}] = [\alpha \boldsymbol{u}]. \tag{2.16}$$

Další řádky věnujme formulaci několika tvrzení, která ponecháváme bez formálního důkazu. Čtenář může důkazy nalézt v literatuře, ze které jsou tvrzení přejata.

Lemma 7. [**31**, s. 1] *Součet* $[\boldsymbol{x}]+[\boldsymbol{y}]$ *tříd* $[\boldsymbol{x}],[\boldsymbol{y}] \in \mathcal{V}/\mathcal{W}$ *ani součin* $\alpha[\boldsymbol{x}]$ *čísla* $\alpha \in \mathbb{K}$ *se třídou* $[\boldsymbol{x}] \in \mathcal{V}/\mathcal{W}$ *nejsou závislé na volbě prvků* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ *ve třídách* $[\boldsymbol{x}],[\boldsymbol{y}]$.

Lemma 8. [**31**, s. 1] *Nechť* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$. *Potom* $\boldsymbol{v}+\mathcal{W}=\boldsymbol{u}+\mathcal{W}$ *právě tehdy, když* $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u} \in \mathcal{W}$.

Lemma 9. [**31**, s. 2] *Nechť* $\mathcal{V}$ *je vektorový prostor nad tělesem* $\mathbb{K}$, $\mathcal{W}$ *je jeho podprostor. Množina* $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ *s operacemi zavedenými vztahy* (2.15) *a* (2.16) *tvoří vektorový prostor nad tělesem* $\mathbb{K}$.

Vektorový prostor popsaný v lemmatu 9 nazýváme *faktorový prostor* vektorového prostoru $\mathcal{V}$ podle podprostoru $\mathcal{W}$.

3.1. Univerzální vlastnost faktorového prostoru. Význam faktorizace doceníme ve třetí kapitole při důkazu věty o linearizaci bilineárního zobrazení. Budeme potřebovat zobrazení nazývající se *kanonická projekce*, které zkonstruujeme v následující větě.

Věta 1 (O kanonické projekci)**.** [**31**, s. 4] *Nechť* $\mathcal{V}$ *je vektorový prostor nad tělesem* $\mathbb{K}$, $\mathcal{W}$ *jeho podprostor. Potom zobrazení* $p: \mathcal{V} \to \mathcal{V}/\mathcal{W}$ *definované* $\forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ *předpisem* $p(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}+\mathcal{W}$ *je homomorfismus. Zobrazení* p *je navíc epimorfismus a platí* $\operatorname{Ker} p = \mathcal{W}$. *Zobrazení* p *se nazývá* kanonická projekce $\mathcal{V}$ *na faktorový prostor* $\mathcal{V}/\mathcal{W}$.

Důkaz. Větu o kanonické projekci budeme dokazovat ve dvou krocích. Nejprve ukážeme, že zobrazení p je epimorfismus. Ve druhém kroku dokážeme rovnost $\operatorname{Ker} p=\mathcal{W}$.

Nechť tedy $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathcal{V}$, potom

$$p(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})+\mathcal{W}=(\boldsymbol{v}+\mathcal{W})+(\boldsymbol{w}+\mathcal{W})=p(\boldsymbol{v})+p(\boldsymbol{w}).$$

Dále nechť $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ a $\lambda \in \mathbb{K}$, pak

$$p(\lambda \boldsymbol{v})=\lambda \boldsymbol{v}+\mathcal{W}=\lambda(\boldsymbol{v}+\mathcal{W})=\lambda p(\boldsymbol{v}),$$

čímž dokazujeme, že zobrazení p je homomorfismus.

Předpokládejme, že $\boldsymbol{v}+\mathcal{W} \in \mathcal{V}/\mathcal{W}$ je libovolný vektor z faktorového prostoru $\mathcal{V}/\mathcal{W}$. Potom ale vektor $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ je vzor vektoru $\boldsymbol{v}+\mathcal{W}$ v zobrazení p. To ovšem znamená, že ke každému prvku z faktorového prostoru $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ existuje vektor v prostoru $\mathcal{V}$, který se na něj v zobrazení p zobrazí. Pak platí, že $\operatorname{Im} p=\mathcal{V}/\mathcal{W}$ a z toho důvodu je zobrazení p epimorfismus.

Ukázat, že platí rovnost $\operatorname{Ker} p=\mathcal{W}$, znamená ověřit, že jedna množina je podmnožinou druhé a naopak. Budeme tedy postupně dokazovat dvě inkluze. Začneme s inkluzí $\operatorname{Ker} p \subset \mathcal{W}$.

Nechť $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} p$. Z definice jádra lineárního zobrazení pak nutně platí $p(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}_{\mathcal{V}/\mathcal{W}} = \boldsymbol{o}_{\mathcal{V}} + \mathcal{W}$, ale také $p(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} + \mathcal{W}$. ([2]) Srovnáme-li obě dvě rovnosti dohromady, dostáváme rovnost $\boldsymbol{v} + \mathcal{W} = \boldsymbol{o}_{\mathcal{V}} + \mathcal{W}$, o které víme, že nastává pouze v případě, kdy $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{o}_{\mathcal{V}} \in \mathcal{W}$. Odtud pak nutně $\boldsymbol{v} \in \mathcal{W}$, což jsme chtěli dokázat.

Inkluzi $\mathcal{W} \subset \operatorname{Ker} p$ dokážeme přesně v opačné posloupnosti kroků, kterými jsme dokázali inkluzi $\operatorname{Ker} p \subset \mathcal{W}$. □

Poznámka 5. Kanonická projekce je pojem, který se v matematice používá pro označení i jiných zobrazení, než které je popsáno ve větě 1. Jako příklad uveďme kanonickou projekci $\pi : \mathcal{F} \to \mathcal{B}$ totálního prostoru $\mathcal{F}$ na bázovou varietu $\mathcal{B}$ v teorii fíbrovaných prostorů [**32**, s. 13].

Věta 2 (Univerzální vlastnost faktorového prostoru)**.** [**33**, s. 2] *Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$, $\mathcal{W}$ jeho podprostor. Potom faktorový prostor $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ má následující univerzální vlastnost. Jestliže $\mathcal{W}'$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$ a $\psi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}'$ je lineární zobrazení, jehož jádro* $\operatorname{Ker} \psi$ *obsahuje podprostor $\mathcal{W}$, potom existuje jednoznačně lineární zobrazení $\phi : \mathcal{V}/\mathcal{W} \to \mathcal{W}'$ takové, že $\psi = \phi \circ p$, kde $p : \mathcal{V} \to \mathcal{V}/\mathcal{W}$ je kanonická projekce. Univerzální vlastnost může být zaznamenána následujícím komutativním diagramem.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{W}' \\ \mathcal{V}/\mathcal{W} \arrow[ur, dotted, "\phi"'] & \end{tikzcd} \tag{2.17}$$

Poznámka 6 (Komutativní diagramy). V matematice, především v teorii kategorií, se pro schématické znázornění zobrazení mezi objekty používají tzv. *diagramy zobrazení*, jakým je například diagram (2.17) v předchozí větě.

Nechť $\mathcal{A}_i$ a $\mathcal{B}_i$ jsou objekty (množiny, vektorové prostory, atd.) a $\phi_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{B}_i$ zobrazení (morfismy), které dohromady určují diagram zobrazení. Pokud pro libovolnou posloupnost zobrazení

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{i_0} \xrightarrow{\phi_{i_0}} \mathcal{B}_{i_0} = \mathcal{A}_{i_1} \xrightarrow{\phi_{i_1}} \mathcal{B}_{i_1} = \mathcal{A}_{i_2} \xrightarrow{\phi_{i_2}} \dots \xrightarrow{\phi_{i_{n-1}}} \mathcal{B}_{i_{n-1}} = \mathcal{A}_{i_n} \xrightarrow{\phi_{i_n}} \mathcal{B}_{i_n} = \mathcal{B}$$

a libovolnou jinou posloupnost zobrazení

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{j_0} \xrightarrow{\phi_{j_0}} \mathcal{B}_{j_0} = \mathcal{A}_{j_1} \xrightarrow{\phi_{j_1}} \mathcal{B}_{j_1} = \mathcal{A}_{j_2} \xrightarrow{\phi_{j_2}} \dots \xrightarrow{\phi_{j_{m-1}}} \mathcal{B}_{j_{m-1}} = \mathcal{A}_{j_m} \xrightarrow{\phi_{j_m}} \mathcal{B}_{j_m} = \mathcal{B}$$

platí

$$\phi_{i_n} \circ \phi_{i_{n-1}} \circ \dots \circ \phi_{i_2} \circ \phi_{i_1} \circ \phi_{i_0} = \phi_{j_m} \circ \phi_{j_{m-1}} \circ \dots \circ \phi_{j_2} \circ \phi_{j_1} \circ \phi_{j_0},$$

označujeme takový diagram jako *komutativní diagram*, popřípadě hovoříme o tom, že *diagram komutuje*.

[2] Nebude-li to z textu zřejmé, budeme nulový vektor z prostoru $\mathcal{V}$ značit symbolem $\boldsymbol{o}_{\mathcal{V}}$.

Důkaz. Nechť $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{W}')$ a $\mathcal{W} \subset \mathrm{Ker}\,\psi$. Definujme zobrazení $\phi : \mathcal{V}/\mathcal{W} \to \mathcal{W}'$ předpisem $\phi(\boldsymbol{v} + \mathcal{W}) = \psi(\boldsymbol{v})$, kde $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$.

Nejprve ukažme, že zobrazení ϕ je korektně definováno, tj. že není závislé na volbě reprezentantů třídy $\boldsymbol{v} + \mathcal{W} \in \mathcal{V}/\mathcal{W}$. Nechť tedy pro $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathcal{V}$ platí $\boldsymbol{v}_1 + \mathcal{W} = \boldsymbol{v}_2 + \mathcal{W} = \boldsymbol{v} + \mathcal{W}$. Potom podle lemmatu 8 existuje vektor $\boldsymbol{w} \in \mathcal{W}$ takový, že $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w}$. Postupně dostáváme

$$\phi(\boldsymbol{v}_1 + \mathcal{W}) = \psi(\boldsymbol{v}_1) = \psi(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w}) = \psi(\boldsymbol{v}_2) + \psi(\boldsymbol{w}) = \psi(\boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{o} = \phi(\boldsymbol{v}_2 + \mathcal{W}),$$

kde jsme využili jednak linearity zobrazení ψ a jednak inkluze $\mathcal{W} \subset \mathrm{Ker}\,\psi$, ze které plyne $\psi(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{o}$.

Přistupme k důkazu linearity zobrazení ϕ. Nechť $\boldsymbol{v} + \mathcal{W}, \boldsymbol{u} + \mathcal{W} \in \mathcal{V}/\mathcal{W}$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Potom

$$\phi((\boldsymbol{v}+\mathcal{W})+(\boldsymbol{u}+\mathcal{W})) = \phi((\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})+\mathcal{W}) = \psi(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}) = \psi(\boldsymbol{v})+\psi(\boldsymbol{u}) = \phi(\boldsymbol{v}+\mathcal{W})+\phi(\boldsymbol{u}+\mathcal{W}),$$

a zřejmě také

$$\phi(\alpha(\boldsymbol{v} + \mathcal{W})) = \phi(\alpha\boldsymbol{v} + \mathcal{W}) = \psi(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha\psi(\boldsymbol{v}) = \alpha\phi(\boldsymbol{v} + \mathcal{W}),$$

čímž dokazujeme, že zobrazení ϕ je homomorfismus.

Nakonec zbývá dokázat jednoznačnost zobrazení ϕ. Předpokládejme tedy existenci zobrazení $\sigma : \mathcal{V}/\mathcal{W} \to \mathcal{W}'$, pro které platí $\sigma \circ p = \psi = \phi \circ p$. Protože p je epimorfismus, je $\sigma(\boldsymbol{v} + \mathcal{W}) = \phi(\boldsymbol{v} + \mathcal{W})$ pro všechny třídy $\boldsymbol{v} + \mathcal{W} \in \mathcal{V}/\mathcal{W}$. Potom je ovšem $\sigma \equiv \phi$ a tím je důkaz dokončen. $\square$

4. Formální lineární obal

V poslední části druhé kapitoly se zaměříme na studium pojmu *formální lineární obal*, který v zahraniční literatuře nalezneme nejčastěji pod označením *free vector space*.

Nechť $\mathcal{S}$ je množina. Formální lineární obal množiny $\mathcal{S}$ budeme nadále značit $C(\mathcal{S})$ podobně, jak je tomu v publikaci [**19**, s. 9], resp. [**22**, s. 13].

Než si však představíme v budoucnu používanou a mnohem abstraktnější definici formálního lineárního obalu, začneme s více představitelnou ukázkou, kterou ve svém textu [**34**, s. 5] ukazuje Kevin Purbhoo. Autor definuje pojem formální lineární obal (free vector space) následujícím způsobem.

Definice 5 (Formální lineární obal)**.** [**34**, s. 5] Nechť $\mathcal{S}$ je množina a $\mathbb{K}$ těleso. Potom *formální lineární obal* $C(\mathcal{S})$ množiny $\mathcal{S}$ je vektorový prostor všech konečných formálních lineárních kombinací prvků z množiny $\mathcal{S}$.

Příklad 2. Uvažujme konečnou množinu $\mathcal{S} = \{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$. Nad touto množinou se nyní pokusíme dle definice 5 vytvořit formální lineární obal $C(\mathcal{S})$.

Prvky množiny $C(\mathcal{S})$ budou všechny konečné formální lineární kombinace prvků z množiny $\mathcal{S}$, tj. prvky ve tvaru

$$\alpha_1\spadesuit + \alpha_2\heartsuit + \alpha_3\clubsuit + \alpha_4\diamondsuit,$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \mathbb{K}$.

Budou-li

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1\spadesuit + \alpha_2\heartsuit + \alpha_3\clubsuit + \alpha_4\diamondsuit \quad \text{a} \quad \boldsymbol{v} = \beta_1\spadesuit + \beta_2\heartsuit + \beta_3\clubsuit + \beta_4\diamondsuit$$

prvky množiny $C(\mathcal{S})$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_4, \beta_1, \ldots, \beta_4 \in \mathbb{K}$, pak jejich součet $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ definujeme předpisem

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (\alpha_1 + \beta_1)\spadesuit + (\alpha_2 + \beta_2)\heartsuit + (\alpha_3 + \beta_3)\clubsuit + (\alpha_4 + \beta_4)\diamondsuit.$$

Podobně skalární násobek $\lambda\boldsymbol{u}$, kde $\lambda \in \mathbb{K}$, definujeme předpisem

$$\lambda\boldsymbol{u} = \lambda\alpha_1\spadesuit + \lambda\alpha_2\heartsuit + \lambda\alpha_3\clubsuit + \lambda\alpha_4\diamondsuit.$$

Je více než zřejmé, že množina $C(\mathcal{S})$ s takto definovanými operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem tvoří vektorový prostor. Vzniklý vektorový prostor budeme nazývat formálním lineárním obalem množiny $\mathcal{S}$.

Poznámka 7. Na tomto místě se pozastavme nad významem pojmu *formální konečná lineární kombinace*. Pro lepší názornost nyní předpokládejme, že množina $\mathcal{S}$ je množina přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Pojem formální označuje, že na prvky množiny $\mathcal{S}$ vždy pohlížíme jako na symboly, byť se může jednat o prvky, jejichž lineární kombinaci je možné upravit. Například $1 + 2 + 3 = 6$, nicméně pojmem formální zdůrazníme, že výraz $1 + 2 + 3$ je prvek množiny $C(\mathbb{N})$ a již více upravit nelze.

Formální lineární kombinací prvků z množiny $\mathbb{N}$ je „nekonečný výraz“

$$\alpha_0 \cdot 0 + \alpha_1 \cdot 1 + \ldots + \alpha_k \cdot k + \ldots,$$

kde $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost prvků z tělesa $\mathbb{K}$. Chceme-li, aby prvky množiny $C(\mathcal{S})$ byly pouze konečné formální lineární kombinace, říkáme tím, že od jistého indexu k jsou všechny členy posloupnosti $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ nulové, neboli platí

$$\exists k \in \mathbb{N}\ \forall i \in \mathbb{N} : (i > k) \Rightarrow (\alpha_i = 0).$$

Popsané vlastnosti můžeme shrnout tak, že každý prvek $\boldsymbol{u}$ formálního lineárního obalu $C(\mathcal{S})$ množiny $\mathcal{S}$ lze napsat ve tvaru

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i,$$

kde $k \in \mathbb{N}$ $s_1, \ldots, s_k \in \mathcal{S}$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$.

4.1. Definice formálního lineárního obalu. K přesnému definování pojmu formální lineární obal nebudeme množinu $C(\mathcal{S})$ chápat jako množinu všech formálních lineárních kombinací prvků v $\mathcal{S}$, ale ekvivalentním způsobem, který uvedeme v následující definici.

Definice 6 (Množina $C(\mathcal{S})$)**.** Nechť $\mathcal{S}$ je množina a $\mathbb{K}$ je těleso. Potom

$$C(\mathcal{S}) = \{f : \mathcal{S} \to \mathbb{K}; \exists \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}, \mathcal{S}' \text{je konečná}, \forall s \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}' : \ f(s) = 0\}.$$

Definici 6 lze jinými slovy interpretovat tak, že množina $C(\mathcal{S})$ je množina všech funkcí f, které množinu $\mathcal{S}$ zobrazují do množiny $\mathbb{K}$ a přitom jsou nenulové pouze v konečně mnoha bodech množiny $\mathcal{S}$. Množina $C(\mathcal{S})$ bývá označována jako množina *zobrazení s konečným nosičem* [**23**, s. 66].

Nosič funkce f je množina $\operatorname{supp} f$ definovaná následujícím způsobem

$$\operatorname{supp} f = \{s; s \in \mathcal{S} \text{ a } f(s) \neq 0\}.$$

Do této chvíle (nebudeme-li uvažovat počáteční pozorování) jsme s množinou $C(\mathcal{S})$ zacházeli pouze jako s množinou bez vnitřní struktury. Abychom vytvořili skutečný formální lineární obal množiny $\mathcal{S}$, potřebujeme na množině $C(\mathcal{S})$ přirozeným způsobem dodefinovat operace sčítání a násobení skalárem s prvky z tělesa $\mathbb{K}$ tak, aby trojice $(C(\mathcal{S}), +, \cdot)_{\mathbb{K}}$ tvořila vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$.

Nechť f a g jsou prvky z množiny $C(\mathcal{S})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Pro každý prvek $s \in \mathcal{S}$ definujeme součet prvků $f + g$ a skalární násobek λf následujícím způsobem

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s), \tag{2.18}$$

$$(\lambda f)(s) = \lambda f(s). \tag{2.19}$$

Zobrazení $f + g$ je tedy zobrazení, pro které platí, že $s \mapsto f(s) + g(s)$. Naproti tomu zobrazení λf je zobrazení, kde $s \mapsto \lambda f(s)$.

Je poměrně jednoduché ukázat, že takto definovaná struktura $(C(\mathcal{S}), +, \cdot)_{\mathbb{K}}$ skutečně tvoří vektorový prostor. Nulová funkce $\boldsymbol{o}$ je v množině $C(\mathcal{S})$ jistě obsažena, neboť splňuje podmínky z definice 6. Množinou $\mathcal{S}'$ je v tomto případě prázdná množina. Opačným prvkem k funkci $f \in C(\mathcal{S})$ je funkce $-f \in C(\mathcal{S})$ daná předpisem $s \mapsto -f(s)$ pro $s \in \mathcal{S}$. Uzavřenost na operace je také definicí 6 zastřešena, neboť jestliže $\operatorname{supp} f$ je nosič zobrazení $f \in C(\mathcal{S})$ a $\operatorname{supp} g$ je nosič zobrazení $g \in C(\mathcal{S})$, pak z definic operací sčítání funkcí (2.18) a násobení funkce skalárem (2.19) plyne [**35**, s. 247], že

$$\operatorname{supp}(f + g) \subseteq (\operatorname{supp} f) \cup (\operatorname{supp} g) \quad \text{a} \quad \operatorname{supp}(\lambda f) \subseteq \operatorname{supp} f,$$

a tedy funkce $f + g$ a λf jsou funkce s konečným nosičem.

Poznámka 8. V publikacích [**23**, s. 65-66] a [**36**, s. 54-55] se problematikou formálních lineárních obalů jejich autoři nepřímo zabývají, nicméně definici formálního lineárního obalu explicitně nezavádějí. V obou zde zmíněných knihách se setkáváme s příkladem vektorového prostoru všech zobrazení (z množiny $\mathcal{X}$ do vektorového prostoru $\mathcal{V}$), který označují symbolem $\mathcal{V}^{\mathcal{X}}$. V případě vektorového prostoru všech funkcí s konečným nosičem je v publikaci [**23**, s. 66] použito označení $K(\mathcal{V}^{\mathcal{X}})$.

4.2. Báze v prostoru $C(\mathcal{S})$. Jestliže $s \in \mathcal{S}$, pak lze definovat funkci $\delta_s \in C(\mathcal{S})$ předpisem

$$\delta_s(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = s, \\ 0 & \text{pro } x \neq s. \end{cases} \tag{2.20}$$

Na dalších řádcích ukážeme, že množina $\{\delta_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ všech takových funkcí $\delta_s \in C(\mathcal{S})$ tvoří bázi vektorového prostoru $C(\mathcal{S})$. To znamená dokážeme, že $\{\delta_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ je lineárně nezávislá množina a platí

$$C(\mathcal{S}) = \langle \{\delta_s\}_{s\in\mathcal{S}} \rangle .$$

Poznámka 9. Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$ a $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$. Potom symbolem $\langle \mathcal{A} \rangle$ označujeme lineární obal množiny $\mathcal{A}$.

Dokázat, že množina $\{\delta_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ generuje vektorový prostor $C(\mathcal{S})$, znamená ověřit, že každá funkce $f \in C(\mathcal{S})$ lze napsat jako lineární kombinace funkcí z množiny $\{\delta_s\}_{s\in\mathcal{S}}$. Jelikož je funkce f dle definice 6 nenulová pouze na konečné množině $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, můžeme ji jednoznačně určit pomocí funkčních hodnot v bodech množiny $\mathcal{S}'$. Označme tyto body postupně $\xi_1, \dots \xi_n$. Potom pro funkci f platí

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_{\xi_i}.$$

Nyní ukážeme, že množina $\{\delta_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ je lineárně nezávislá. To provedeme ověřením lineární nezávislosti každé její konečné podmnožiny [**37**].

Nechť $\{\delta_{\xi_1}, \dots, \delta_{\xi_n}\}$ je podmnožina množiny $\{\delta_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ a nechť $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{\xi_i} = 0$, kde $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Body $\xi_1, \dots \xi_n$ jsou po dvou různé, a proto $\alpha_i = 0$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$. Tím jsme ukázali, že množina $\{\delta_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ je lineárně nezávislá. Množina $\{\delta_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ proto tvoří bázi formálního lineárního obalu $C(\mathcal{S})$.

Poznámka 10. Z uvedeného plyne, že dimenze vektorového prostoru $C(\mathcal{S})$ je rovna počtu prvků v množině $\mathcal{S}$. V mnohých případech, které budeme později studovat, nebude prostor $C(\mathcal{S})$ konečné dimenze.

Příklad 3. Uvažujme opět konečnou množinu $\mathcal{S} = \{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$. Formální lineární obal $C(\mathcal{S})$ množiny $\mathcal{S}$ je množina všech funkcí s konečným nosičem s operacemi sčítání a násobení skalárem z tělesa $\mathbb{K}$. Situaci jsme si ulehčili volbou konečné množiny $\mathcal{S}$, neboť funkci $F \in C(\mathcal{S})$ můžeme zadat jako relaci na kartézském součinu $\mathcal{S} \times \mathbb{K}$ výčtem prvků. Nechť tedy například

$$F = \{[\spadesuit, 12]; [\heartsuit, 1]; [\clubsuit, 3]; [\diamondsuit, -13]\}.$$

Báze vektorového prostoru $C(\mathcal{S})$ je potom množina $\{\delta_\spadesuit, \delta_\heartsuit, \delta_\clubsuit, \delta_\diamondsuit\}$. Skutečně je velice jednoduché se přesvědčit, že funkci F lze zapsat právě jedním způsobem jako lineární kombinaci funkcí z báze prostoru $C(\mathcal{S})$. Platí totiž

$$F(x) = (12\delta_\spadesuit + \delta_\heartsuit + 3\delta_\clubsuit - 13\delta_\diamondsuit)(x).$$

S použitím (2.18) a (2.19) například dostáváme

$$F(\spadesuit) = 12\delta_\spadesuit(\spadesuit) + \delta_\heartsuit(\spadesuit) + 3\delta_\clubsuit(\spadesuit) - 13\delta_\diamondsuit(\spadesuit) = 12\cdot 1 + 1\cdot 0 + 3\cdot 0 - 13\cdot 0 = 12.$$

Jak jsme již dříve předeslali, v dalším textu budeme pod pojmem formální lineární obal množiny $\mathcal{S}$ chápat vektorový prostor funkcí $f : \mathcal{S} \to \mathbb{K}$ s konečným nosičem, namísto vektorového prostoru všech konečných formálních lineárních kombinací prvků z $\mathcal{S}$. Pro úplnost nyní dokažme, že oba přístupy k pojmu formální lineární obal jsou ekvivalentní.

Symbolem $\tilde{C}(\mathcal{S})$ označme formální lineární obal z definice 5 a symbolem $C(\mathcal{S})$ formální lineární obal vycházející z definice 6. Dokážeme, že oba vektorové prostory jsou navzájem zaměnitelné neboli izomorfní ($\tilde{C}(\mathcal{S}) \simeq C(\mathcal{S})$). To znamená dokážeme, že existuje lineární zobrazení $\psi : \tilde{C}(\mathcal{S}) \to C(\mathcal{S})$, které je zároveň injektivní a surjektivní.

Ukážeme, že lineární zobrazení $\psi : \tilde{C}(\mathcal{S}) \to C(\mathcal{S})$, definované $\forall \boldsymbol{u} \in \tilde{C}(\mathcal{S})$ předpisem

$$\psi(\boldsymbol{u}) = \psi\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{s_i},$$

kde $k \in \mathbb{N}$, $s_1, \dots, s_k \in \mathcal{S}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ je hledaný izomorfismus.

Nejprve ukažme, že zobrazení ψ je lineární. Nechť $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \tilde{C}(\mathcal{S})$, přičemž

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i \quad \text{a} \quad \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i s_i,$$

kde $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $k < n$ a dodefinujme $\alpha_i = 0$ pokud $k < i \leq n$. Potom pro obraz součtu $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ dostáváme

$$\psi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \psi\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i s_i\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) s_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\delta_{s_i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{s_i} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \delta_{s_i} = \psi(\boldsymbol{u}) + \psi(\boldsymbol{v}).$$

Podobně pro obraz skalárního násobku $\lambda\boldsymbol{u}$ vektoru $\boldsymbol{u}$, kde $\lambda \in \mathbb{K}$ dostáváme

$$\psi(\lambda\boldsymbol{u}) = \psi\left(\lambda \sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda\alpha_i s_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda\alpha_i \delta_{s_i} = \lambda \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{s_i} = \lambda\psi(\boldsymbol{u}).$$

Nyní dokážeme, že lineární zobrazení ψ je injektivní a surjektivní. Zobrazení ψ je injektivní právě tehdy, když pro libovolnou dvojici vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ z prostoru $\tilde{C}(\mathcal{S})$ platí $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v} \Rightarrow \psi(\boldsymbol{u}) \neq \psi(\boldsymbol{v})$. Pokud počet nenulových koeficientů konečné formální lineární kombinace $\boldsymbol{u}$ bude různý od počtu nenulových koeficientů v konečné formální lineární kombinaci $\boldsymbol{v}$, bude implikace zřejmě splněna. Proto se v dalším důkazu zaměříme pouze na situaci, kdy počet nenulových koeficientů daných konečných formálních lineárních kombinací bude stejný. Nechť tedy

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i \quad \text{a} \quad \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i s_i,$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{K}$. Předpokládejme, že $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$, tj. $\exists\, i \in \{1, \ldots, k\} : \alpha_i \neq \beta_i$. Jestliže $\psi(\boldsymbol{u}) = \psi(\boldsymbol{v})$, pak $\psi(\boldsymbol{u}) - \psi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ neboli

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{s_i} - \sum_{i=1}^{k} \beta_i \delta_{s_i} = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \beta_i) \delta_{s_i} = \boldsymbol{o}.$$

Tato rovnost však nastává pouze v případě, kdy $\forall i \in \{1, \ldots, k\} : \alpha_i - \beta_i = 0$, tj. pouze tehdy, když $\alpha_i = \beta_i$. Protože jsme však předpokládali existenci indexu i, kdy $\alpha_i \neq \beta_i$, znamená to, že rovnost $\psi(\boldsymbol{u}) = \psi(\boldsymbol{v})$ nebude splněna a tudíž $\psi(\boldsymbol{u}) \neq \psi(\boldsymbol{v})$. Tím jsme ověřili, že lineární zobrazení ψ je injektivní (monomorfismus).

Z předešlého víme, že každou funkci $f \in C(\mathcal{S})$ lze zapsat právě jedním způsobem jako lineární kombinaci funkcí z báze $\{\delta_s\}_{s \in \mathcal{S}}$. Pro libovolnou funkci $f \in C(\mathcal{S})$ tudíž existují koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ takové, že $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{s_i}$. Taková funkce f je jistě obrazem konečné formální lineární kombinace $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i$ v zobrazení ψ. Protože lze vzor zobrazení ψ nalézt k libovolnému prvku z prostoru $C(\mathcal{S})$, znamená to, že zobrazení ψ je surjektivní (epimorfismus).

Dohromady jsme dokázali, že lineární zobrazení ψ je hledaný izomorfismus vektorových prostorů $\tilde{C}(\mathcal{S})$ a $C(\mathcal{S})$, a tudíž platí $\tilde{C}(\mathcal{S}) \simeq C(\mathcal{S})$. Na oba přístupy definice formálního lineárního obalu lze nyní pohlížet jako na zaměnitelné.

4.3. Univerzální vlastnost formálního lineárního obalu. Zaveďme zobrazení $\kappa : \mathcal{S} \to C(\mathcal{S})$ tak, že pro libovolný prvek $s \in \mathcal{S}$ platí $s \mapsto \delta_s$. Zobrazení κ určuje bijekci mezi množinou $\mathcal{S}$ a bází $\{\delta_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ formálního lineárního obalu $C(\mathcal{S})$. Odtud plyne alternativní uchopení pojmu formální lineární obal, které říká, že formální lineární obal množiny $\mathcal{S}$ je vektorový prostor, jehož je množina $\mathcal{S}$ bází.

Věta 3 (Univerzální vlastnost formálního lineárního obalu)**.** [**37**] *Nechť $\mathcal{S}$ je množina, $C(\mathcal{S})$ je formální lineární obal $\mathcal{S}$. Zobrazení $\kappa : \mathcal{S} \to C(\mathcal{S})$ má následující univerzální vlastnost. Jestliže ϕ je libovolné zobrazení z množiny $\mathcal{S}$ do vektorového prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbb{K}$, pak existuje jednoznačně lineární zobrazení $\overline{\phi}$ takové, že následující diagram* (2.21) *komutuje.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\kappa"'] & \mathcal{V} \\ C(\mathcal{S}) \arrow[ur, dotted, "\overline{\phi}"'] & \end{tikzcd} \tag{2.21}$$

Důkaz. Z části 4.2 na straně 23 víme, že ve vektorovém prostoru $C(\mathcal{S})$ existuje báze. Touto bází je množina funkcí $\{\delta_s\}_{s\in\mathcal{S}}$, které jsou definovány předpisem (2.20). Požadované zobrazení $\overline{\phi} : C(\mathcal{S}) \to \mathcal{V}$ definujeme obrazy bázových vektorů z prostoru $C(\mathcal{S})$. Pro zobrazení $\overline{\phi}$ tedy platí $\overline{\phi}(\delta_s) = \phi(s)$, kde $s \in \mathcal{S}$.

Pro důkaz jednoznačnosti zobrazení $\overline{\phi}$ předpokládejme existenci druhého lineárního zobrazení $\overline{\sigma} : C(\mathcal{S}) \to \mathcal{V}$. Pro obě zobrazení $\overline{\phi}$ a $\overline{\sigma}$ platí $\phi = \overline{\phi} \circ \kappa = \overline{\sigma} \circ \kappa$. Potom pro všechna $s \in \mathcal{S}$ dostáváme $\overline{\phi}(\delta_s) = \overline{\sigma}(\delta_s)$, z čehož plyne, že $\overline{\phi} = \overline{\sigma}$. □

KAPITOLA 3

Tenzorové součiny vektorových prostorů

V rámci této kapitoly nastíníme základní koncept teorie tenzorových součinů vektorových prostorů. Cílem bude jednak popsat formální konstrukci tenzorového součinu dvou vektorových prostorů a jednak definovat tenzor jako matematický objekt. Následně konstrukci tenzorového součinu rozšíříme i na obecný konečný systém vektorových prostorů.[1] Všechny vektorové prostory budeme uvažovat nad pevným tělesem $\mathbb{K}$ charakteristiky 0.

V literatuře se můžeme setkat s několika způsoby, jak pojem tenzor definovat. V následujícím přehledu si tyto možnosti zavádění tenzorů do matematiky blíže specifikujme.

(1) *Analytická definice tenzoru.* Jedná se o nejčastější způsob definování tenzoru. K této definici se dostaneme ve čtvrté kapitole *Tenzory v souřadnicích.*

Ve stručnosti jde o to, že si tenzor představujeme jako soubor hodnot nebo funkcí, které se při změně souřadnicové soustavy transformují podle daných pravidel.

Tímto způsobem definuje tenzor většina literatury věnující se aplikované matematice a fyzice. Namátkou např. [**38**, s. 43], [**39**, s. 238], [**40**, s. 103], [**41**, s. 17-19], [**42**, s. 441].

Důležitou informací rovněž je, že taková definice tenzoru nevyžaduje formálně definovat pojem duální vektorový prostor. Namísto toho se ve vektorovém prostoru definují dvě báze, které jsou vůči sobě tzv. *sdružené* [**43**, s. 14-15].

(2) *Tenzor jako multilineární forma.* Druhý, více abstraktní způsob definice tenzoru, se často používá v tenzorové analýze. Definice tenzoru jako multilineární formy je publikována například v knize [**44**, s. 27].

(3) *Tenzor jako prvek tenzorového součinu vektorových prostorů.* Poslední definice vychází z toho, že tenzorovým součinem dvou vektorových prostorů vznikne nový vektorový prostor, jehož prvky nazýváme tenzory.

Tento způsob definice tenzoru je nejvíce abstraktní, neboť samotná definice, že tenzor je prvek tenzorového součinu vektorových prostorů, nás nutí právě ke studiu pojmu tenzorový součin. V algebraické literatuře se častěji setkáme s tenzorovým součinem modulů [**35**, s. 370-371]. Konstrukce lze však

[1] Termínem obecný konečný systém vektorových prostorů máme na mysli obecně různé vektorové prostory $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$ nad stejným tělesem $\mathbb{K}$.

ohebně přizpůsobit vektorovým prostorům, ba dokonce proces se v některých případech zjednoduší skutečností, že ve vektorovém prostoru konečné dimenze vždy existuje konečná báze.

Je zřejmé, že v dalším textu budeme rozvíjet třetí ze zmiňovaných způsobů zavedení tenzoru do matematiky. Pro další studium je klíčový koncept linearizace bilineárního zobrazení, který si nyní představíme.

1. Linearizace bilineárního zobrazení

Nechť $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ a $\mathcal{U}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$. Dále uvažujme množinu $\mathscr{L}(\mathcal{V}\times\mathcal{W},\mathcal{U})$ všech bilineárních zobrazení z kartézského součinu $\mathcal{V}\times\mathcal{W}$ do vektorového prostoru $\mathcal{U}$.

V následující větě si ukážeme, že kromě vektorových prostorů $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ zde existuje vektorový prostor $\mathcal{U}_0$ nad tělesem $\mathbb{K}$ a bilineární zobrazení $\iota \in \mathscr{L}(\mathcal{V}\times\mathcal{W},\mathcal{U}_0)$ se zajímavou vlastností. Slovem zajímavý zde máme na mysli skutečnost, že pomocí prostoru $\mathcal{U}_0$ a bilineárního zobrazení ι můžeme libovolné bilineární zobrazení z prostoru $\mathscr{L}(\mathcal{V}\times\mathcal{W},\mathcal{U})$ linearizovat. Neboli ke každému bilineárnímu zobrazení z vektorového prostoru $\mathscr{L}(\mathcal{V}\times\mathcal{W},\mathcal{U})$ lze najít lineární zobrazení z prostoru $\mathrm{Hom}(\mathcal{U}_0,\mathcal{U})$ tak, že složením se zobrazením ι vznikne původní bilineární zobrazení.

Přesně je o tom pojednáno v následující větě o linearizaci bilineárního zobrazení.

Věta 4 (O linearizaci bilineárního zobrazení)**.** [**20**, s. 4] *Nechť $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ a $\mathcal{U}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$. Potom zde existují vektorový prostor $\mathcal{U}_0$ nad tělesem $\mathbb{K}$ a bilineární zobrazení $\iota \in \mathscr{L}(\mathcal{V}\times\mathcal{W},\mathcal{U}_0)$, které splňují následující vlastnosti (podmínky)* (T1) *a* (T2)*.*

(T1) *$\mathcal{U}_0$ je generován obrazem množiny $\mathcal{V}\times\mathcal{W}$ v zobrazení ι, neboli platí $\mathcal{U}_0 = \langle \mathrm{Im}\,\iota \rangle$.*

(T2) *Pro libovolné bilineární zobrazení $\phi \in \mathscr{L}(\mathcal{V}\times\mathcal{W},\mathcal{U})$ existuje lineární zobrazení $F : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}$, pro které platí $\phi = F \circ \iota$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}\times\mathcal{W} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathcal{U} \\ \mathcal{U}_0 \arrow[ur, dotted, "F"'] & \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Dvojice $(\mathcal{U}_0,\iota)$ je dána jednoznačně v následujícím významu. Jestliže dvojice $(\mathcal{U}_0,\iota)$ a $(\mathcal{U}_0',\iota')$, obsahující vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$ a bilineární zobrazení, splňují podmínky (T1) *a* (T2)*, potom existuje jednoznačně izomorfismus $F_0 : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_0'$ takový, že platí $F_0 \circ \iota = \iota'$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}\times\mathcal{W} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\iota'"'] & \mathcal{U}_0 \arrow[d, dotted, "F_0"] \\ & \mathcal{U}_0' \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Důkaz předloženého tvrzení rozdělíme do dvou samostatných podkapitol. V první z nich se zaměříme na důkaz jednoznačnosti dvojice $(\mathcal{U}_0, \iota)$. Druhá, obtížnější část důkazu, se bude zabývat existencí prostoru $\mathcal{U}_0$ a bilineárního zobrazení ι.

Důkaz existence je konstruktivní. Nejprve vytvoříme vektorový prostor $\mathcal{U}_0$ a bilineární zobrazení ι a až poté se přesvědčíme, že námi vytvořená struktura splňuje požadavky (T1) a (T2) z předešlé věty.

Než se však pustíme do samotného dokazování, zformulujeme a dokážeme pomocné tvrzení, které říká, že podmínku (T1) společně s (T2) lze přeformulovat do jediné podmínky (T).

1.1. Ekvivalence (T) s (T1) a (T2). Podmínky (T1) a (T2) ve větě 4 jsou ekvivalentní následující podmínce (T).

(T) *Pro libovolné zobrazení $\phi \in \mathscr{L}(\mathcal{V} \times \mathcal{W}, \mathcal{U})$ existuje právě jedno lineární zobrazení $F : \mathcal{U}_0' \to \mathcal{U}$, pro které platí $\phi = F \circ \iota$.*

Z formulace podmínky (T) je dobře patrné, že se jedná o podmínku (T2), která je doplněna informací o jednoznačnosti lineárního zobrazení F.

Důkaz. Naším úkolem je dokázat tvrzení ve formě ekvivalence, kterou lze ve stručnosti použitím logické symboliky přepsat do tvaru (T) $\Leftrightarrow$ ((T1) $\wedge$ (T2)). Tvrzení ve tvaru ekvivalence nejčastěji dokazujeme jako dvě implikace. Dokažme nejprve jednodušší implikaci zprava.

Předpokládejme, že dvojice $(\mathcal{U}_0, \iota)$ splňuje podmínky (T1) a (T2). Chceme ukázat, že podmínka (T) je rovněž splněna. Existence zobrazení F plyne z podmínky (T2), takže naším úkolem je dokázat jednoznačnost tohoto zobrazení.

Nechť $\phi \in \mathscr{L}(\mathcal{V} \times \mathcal{W}, \mathcal{U})$. Buďte F a F' lineární zobrazení ($F, F' : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}$), která splňují $\phi = F \circ \iota = F' \circ \iota$. Pro libovolnou dvojici vektorů $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ dostáváme

$$(F \circ \iota)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = F(\iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})) = \phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = F'(\iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})) = (F' \circ \iota)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}),$$

a protože obrazy $\iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ generují prostor $\mathcal{U}_0$, platí, že $F = F'$. Dále přistoupíme k důkazu implikace zleva.

Jestliže dvojice $(\mathcal{U}_0, \iota)$ splňuje podmínku (T), pak nutně splňuje podmínku (T2). Je to dáno tím, že v podmínce (T) je podmínka (T2) obsažena. Stačí nám proto dokázat, že podmínka (T1) je rovněž splněna.

Kdyby podmínka (T1) nebyla splněna, znamenalo by to, že množina $\operatorname{Im} \iota$ generuje pouze vektorový podprostor $\mathcal{U}_0'$ prostoru $\mathcal{U}_0$. Obraz bilineárního zobrazení ι je obsažen v podprostoru $\mathcal{U}_0'$. Proto může být zobrazení ι považováno jako zobrazení $\mathcal{V} \times \mathcal{W} \to \mathcal{U}_0'$, které označme ι_1. Jestliže aplikujeme podmínku (T2) na zobrazení ι_1, obdržíme lineární zobrazení ψ s vlastností $\iota_1 = \psi \circ \iota$. Dále nechť j je inzerce $\mathcal{U}'_0 \to \mathcal{U}_0$.[2] Potom $\iota = j \circ \iota_1$, a tudíž $\iota = j \circ \iota_1 = j \circ \psi \circ \iota$.

Na druhé straně identický automorfismus $\mathbb{1}_{\mathcal{U}_0}$ na prostoru $\mathcal{U}_0$ jistě splňuje podmínku $\mathrm{id} \circ \iota = \iota$ z čehož plyne, že zvolíme-li $F = \mathbb{1}_{\mathcal{U}_0}$, bude splněna podmínka (T) pro zobrazení ι. Protože $(j \circ \psi) \circ \iota = \iota$, dostáváme díky jednoznačnosti zobrazení ψ, že $j \circ \psi = \mathbb{1}_{\mathcal{U}_0}$. To ovšem znamená, že inzerce j je surjektivní zobrazení, z čehož plyne, že $\mathcal{U}'_0 = \mathcal{U}_0$. Popsanou situaci přehledněji znázorňuje následující komutativní diagram (3.3).

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V} \times \mathcal{W} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\iota_1"] \arrow[ddr, "\iota"'] & \mathcal{U}_0 \arrow[d, "\psi"] \arrow[dd, bend left, "F=\mathbb{1}_{\mathcal{U}_0}"] \\
& \mathcal{U}'_0 \arrow[d, hook, "j"] \\
& \mathcal{U}_0
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Důkaz je názornější, jestliže uvažujeme $\mathcal{U}_0$ jako vektorový prostor konečné dimenze. V tomto případě je podprostor $\mathcal{U}'_0$ také konečné dimenze a proto v něm existuje konečná báze $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$. Následně existuje konečná množina lineárně nezávislých vektorů $\{\boldsymbol{u}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$, kterými lze bázi prostoru $\mathcal{U}'_0$ doplnit na bázi celého prostoru $\mathcal{U}_0$.

Lineární zobrazení F je určeno jednoznačně obrazy bázových vektorů z prostoru $\mathcal{U}_0$. Pokud nyní definujeme lineární zobrazení F tak, že $F(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1, \dots, F(\boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{u}_k$ a vektorům $\boldsymbol{u}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{u}_n$ přiřadíme libovolné vektory z prostoru $\mathcal{U}'_0$, získáme lineární zobrazení, které není identický automorfismus na prostoru $\mathcal{U}_0$, nicméně splňuje rovnost $F(\iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})) = \iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$. Protože takových lineárních zobrazení existuje obecně nekonečně mnoho, jedná se o spor s jednoznačností zobrazení F v podmínce (T). Zobrazení je pak dáno jednoznačně pouze v případě, kdy $\mathcal{U}'_0 = \mathcal{U}_0$. $\square$

1.2. Důkaz jednoznačnosti dvojice $(\mathcal{U}_0, \iota)$. V následujícím paragrafu podáme důkaz jednoznačnosti dvojice $(\mathcal{U}_0, \iota)$, kde $\mathcal{U}_0$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$ a ι je bilineární zobrazení z prostoru $\mathscr{L}(\mathcal{V} \times \mathcal{W}, \mathcal{U}_0)$. Dvojice $(\mathcal{U}_0, \iota)$ splňuje podmínky (T1) a (T2), a tudíž splňuje podmínku (T).

O dvojici $(\mathcal{U}_0, \iota)$ říkáme, že je dána jednoznačně až na izomorfismus, což znamená, že pokud existuje další dvojice $(\mathcal{U}'_0, \iota')$ splňující podmínky (T1) a (T2), resp. (T), pak existuje izomorfní zobrazení z prostoru $\mathcal{U}_0$ do prostoru $\mathcal{U}'_0$.

Idea následujícího důkazu spočívá v tom, že předpokládáme existenci další dvojice $(\mathcal{U}'_0, \iota')$, která splňuje podmínku (T). Užitím podmínky (T) nalezneme požadované izomorfní zobrazení. Tento důkaz pro moduly lze nalézt v publikaci [**5**, s. 6-7].

---

[2] Jestliže S je podmnožina množiny U, tak *inzerce* $j : \mathcal{S} \to \mathcal{U}$ je takové zobrazení, které každému prvku s množiny S přiřazuje stejný prvek s v množině $\mathcal{U}$ [**35**, s. 26].

Důkaz. Uvažujme nejprve dvojici $(\mathcal{U}_0, \iota)$, pomocí které můžeme dle vlastností (T1) a (T2) ve větě 4 linearizovat libovolné bilineární zobrazení ϕ z prostoru $\mathscr{L}(\mathcal{V}\times\mathcal{W}, \mathcal{U'}_0)$. Jestliže za zobrazení ϕ v podmínce (T2) zvolíme zobrazení $\iota' : \mathcal{V}\times\mathcal{W} \to \mathcal{U'}_0$, potom dle této podmínky existuje lineární zobrazení $F_0 : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U'}_0$, pro které platí, že $\iota' = F_0 \circ \iota$ neboli že následující diagram (3.4) komutuje.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}\times\mathcal{W} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\iota'"'] & \mathcal{U}_0 \arrow[d, dotted, "F_0"] \\ & \mathcal{U}'_0 \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Protože podmínky (T1) a (T2) jsou dohromady ekvivalentní podmínce (T), znamená to, že homomorfismus F_0 je určen jednoznačně.

Podobnou úvahu aplikujeme na dvojici $(\mathcal{U'}_0, \iota')$. Za zobrazení ϕ zde však zvolíme bilineární zobrazení $\iota : \mathcal{V}\times\mathcal{W} \to \mathcal{U}_0$. V tomto případě pak podle podmínky (T) existuje právě jedno lineární zobrazení $G_0 : \mathcal{U'}_0 \to \mathcal{U}_0$ takové, že $\iota = G_0 \circ \iota'$ neboli že diagram (3.5) komutuje.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}\times\mathcal{W} \arrow[r, "\iota'"] \arrow[dr, "\iota"'] & \mathcal{U}'_0 \arrow[d, dotted, "G_0"] \\ & \mathcal{U}_0 \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

Komutativní diagramy (3.4) a (3.5) nyní vhodně zkombinujeme do jediného komutativního diagramu (3.6).

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{U}_0 \arrow[d, "F_0"] \\ \mathcal{V}\times\mathcal{W} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r, "\iota'"] \arrow[dr, "\iota"'] & \mathcal{U}'_0 \arrow[d, "G_0"] \\ & \mathcal{U}_0 \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

Odebráním vektorového prostoru $\mathcal{U'}_0$ a bilineárního zobrazení ι', obdržíme nový zjednodušený komutativní diagram (3.7).

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{U}_0 \arrow[dd, "G_0\circ F_0"] \\ \mathcal{V}\times\mathcal{W} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & \\ & \mathcal{U}_0 \end{tikzcd} \tag{3.7}$$

V této chvíli opět využijeme předpokladu, že dvojice $(\mathcal{U}_0, \iota)$ splňuje vlastnosti (T1) a (T2). Diagram (3.7) je ve skutečnosti diagram (3.1) při volbě $\mathcal{U} := \mathcal{U}_0$, $\phi := \iota$ a konečně

$F := G_0 \circ F_0$. Zobrazení $G_0 \circ F_0 : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_0$ je podle podmínky (T) určeno jednoznačně a dle této podmínky rovněž platí, že $\iota \circ (G_0 \circ F_0) = \iota$. Takové zobrazení je určitě identický automorfismus na prostoru $\mathcal{U}_0$ neboli $\mathbb{1}_{\mathcal{U}_0}$, neboť pro něj platí $\iota \circ \mathbb{1}_{\mathcal{U}_0} = \iota$. Takže celkem dostáváme, že $G_0 \circ F_0 = \mathbb{1}_{\mathcal{U}_0}$.

Jinou kombinací komutativních diagramů (3.4) a (3.5) lze vytvořit nový komutativní diagram (3.8).

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{U}'_0 \arrow[d, "G_0"] \\ \mathcal{V} \times \mathcal{W} \arrow[ur, "\iota'"] \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\iota'"'] & \mathcal{U}_0 \arrow[d, "F_0"] \\ & \mathcal{U}'_0 \end{tikzcd} \tag{3.8}$$

Podobně jako v předešlém případě odebereme z diagramu (3.8) vektorový prostor $\mathcal{U}_0$ a bilineární zobrazení ι. Tím vznikne komutativní diagram (3.9).

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{U}'_0 \arrow[dd, "F_0 \circ G_0"] \\ \mathcal{V} \times \mathcal{W} \arrow[ur, "\iota'"] \arrow[dr, "\iota'"'] & \\ & \mathcal{U}'_0 \end{tikzcd} \tag{3.9}$$

Dvojice $(\mathcal{U'}_0, \iota')$ také splňuje vlastnosti (T1) a (T2). Diagram (3.9) vznikne z diagramu (3.1) volbou $\phi := \iota'$, $\mathcal{U}_0 := \mathcal{U'}_0$ a $F := F_0 \circ G_0$. Složené lineární zobrazení $F_0 \circ G_0 : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_0$ je podle podmínky (T) určeno jednoznačně a dle této podmínky rovněž platí, že $\iota' \circ (F_0 \circ G_0) = \iota'$. Takové zobrazení je určitě identický automorfismus na prostoru $\mathcal{U'}_0$ neboli $\mathbb{1}_{\mathcal{U'}_0}$, neboť pro něj platí $\iota' \circ \mathbb{1}_{\mathcal{U'}_0} = \iota'$. Takže celkem dostáváme, že $F_0 \circ G_0 = \mathbb{1}_{\mathcal{U'}_0}$.

Dvěma přístupy jsme dospěli ke zjištění, že pro lineární zobrazení $F_0 : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U'}_0$ a $G_0 : \mathcal{U'}_0 \to \mathcal{U}_0$ platí současně $G_0 \circ F_0 = \mathbb{1}_{\mathcal{U}_0}$ a $F_0 \circ G_0 = \mathbb{1}_{\mathcal{U'}_0}$.

Protože lineární zobrazení F_0 a G_0 splňují předpoklady lemmatu 2, zjišťujeme, že zobrazení F_0 je izomorfismus vektorových prostorů $\mathcal{U}_0$ a $\mathcal{U'}_0$. $\square$

1.3. Důkaz existence dvojice $(\mathcal{U}_0, \iota)$**.** Do této chvíle jsme předpokládali, že vektorový prostor $\mathcal{U}_0$ a bilineární zobrazení ι existují. Dokázali jsme, že pokud taková dvojice $(\mathcal{U}_0, \iota)$ existuje, pak existuje jednoznačně až na izomorfismus.

Důkaz existence je konstruktivní. Postupně vytvoříme vektorový prostor $\mathcal{U}_0$ a zobrazení ι. Dále se přesvědčíme, že zobrazení ι tak, jak jsme jej vytvořili, je bilineární, a konečně ukážeme, že vzniklá dvojice $(\mathcal{U}_0, \iota)$ splňuje vlastnosti (T1) a (T2) dokazované věty o linearizaci bilineárního zobrazení.

V důkazu budeme četně využívat poznatků ze druhé kapitoly *Algebraický úvod do studia tenzorového počtu*. Především z částí *Faktorové prostory* a *Formální lineární obal.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ a $\mathcal{U}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$, ϕ buď bilineární zobrazení z prostoru $\mathscr{L}(\mathcal{V} \times \mathcal{W}, \mathcal{U})$.

Vytvoříme kartézský součin vektorových prostorů $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$, tedy $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$. Kartézský součin $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ není sám o sobě vektorový prostor.[3] Je to množina všech uspořádaných dvojic ve tvaru $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$, kde vektor $\boldsymbol{v}$ je prvkem prostoru $\mathcal{V}$ a $\boldsymbol{w}$ je prvkem vektorového prostoru $\mathcal{W}$.

Nyní vytvořme formální lineární obal množiny $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$, který označme $C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})$. Množina $C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})$ obsahuje podle definice 6 všechny funkce $f : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \to \mathbb{K}$, které mají konečný nosič $\operatorname{supp} f$.

Pro dvě funkce f a g z množiny $C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})$ jsou definovány operace sčítání funkcí a násobení funkce skalárem $\lambda \in \mathbb{K}$ následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \forall(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W} : &\qquad (f+g)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \\ \forall(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}, \forall\lambda \in \mathbb{K} : &\qquad (\lambda f)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \lambda f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}). \end{aligned}$$

Množina $C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})$ s takto definovanými operacemi sčítání funkcí a násobení funkce skalárem tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$. Připomeňme, že množina $C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})$ obsahuje funkce ve tvaru $\delta_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})}$, kde $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ a $\boldsymbol{w} \in \mathcal{W}$, které jsou definovány předpisem

$$\delta_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1 & \text{pro } (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \\ 0 & \text{pro } (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \neq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \end{cases}$$

Jak jsme si dříve ukázali, množina všech funkcí $\{\delta_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})}\}_{v \in \mathcal{V}, w \in \mathcal{W}}$ tvoří bázi prostoru $C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})$. Každou funkci $f \in C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})$ lze zapsat právě jedním způsobem jako konečnou lineární kombinaci ve tvaru

$$f = \sum_{i=1}^{k} f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_i)\delta_{(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{w}_i)}.$$

Zobrazení, které každému prvku $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ přiřadí funkci $\delta_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})} \in C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})$, označme κ. Toto zobrazení je bijekce množiny $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ na množinu $C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})$ a podle věty 3 má následující vlastnost. Pokud je ϕ libovolné zobrazení z množiny $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ do vektorového prostoru $\mathcal{U}$, pak existuje lineární zobrazení $\psi : C(\mathcal{V} \times \mathcal{W}) \to \mathcal{U}$, pro které platí, že $\phi = \psi \circ \kappa$, a tudíž následující diagram (3.10) komutuje.

[3]Na množině $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ nejsou definovány operace sčítání uspořádaných dvojic a násobení uspořádané dvojice skalárem.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \times \mathcal{W} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\kappa"'] & \mathcal{U} \\ C(\mathcal{V} \times \mathcal{W}) \arrow[ur, dotted, "\psi"] & \end{tikzcd} \tag{3.10}$$

Lineární zobrazení ψ definujeme stejným způsobem, jakým jsme to provedli při důkazu věty 3 na straně 26. Pro všechny funkce $\delta_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})}$ definujeme $\psi(\delta_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})}) = \phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.

Protože ϕ je bilineární zobrazení a nám se podařilo pomocí zobrazení κ, ψ a vektorového prostoru $C(\mathcal{V}\times\mathcal{W})$ toto bilineární zobrazení linearizovat, bylo by možné vektorový prostor $C(\mathcal{V}\times\mathcal{W})$ považovat za kandidáta na hledaný vektorový prostor $\mathcal{U}_0$. Zobrazení κ však není bilineární. Platí totiž

$$\kappa(\mu_1\boldsymbol{v}_1 + \mu_2\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) = \delta_{(\mu_1\boldsymbol{v}_1+\mu_2\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w})},$$
$$\mu_1\kappa(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) + \mu_2\kappa(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) = \mu_1\delta_{(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{w})} + \mu_2\delta_{(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w})}.$$

Na pravé straně máme funkce, které si evidentně nejsou rovny. Jednoduchým srovnáním funkčních hodnot, které tyto funkce mohou nabývat dostáváme

$$\delta_{(\mu_1\boldsymbol{v}_1+\mu_2\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w})} \neq \mu_1\delta_{(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{w})} + \mu_2\delta_{(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w})},$$

a proto

$$\kappa(\mu_1\boldsymbol{v}_1 + \mu_2\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) \neq \mu_1\kappa(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) + \mu_2\kappa(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}).$$

Zobrazení κ nelze tudíž považovat za hledané bilineární zobrazení ι.

Nechť $\mathcal{Z}$ je vektorový podprostor prostoru $C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})$ generovaný všemi prvky ve tvaru

$$\delta_{(\mu_1\boldsymbol{v}_1+\mu_2\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w})} - \mu_1\delta_{(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{w})} - \mu_2\delta_{(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w})},$$
$$\delta_{(\boldsymbol{v},\mu_1\boldsymbol{w}_1+\mu_2\boldsymbol{w}_2)} - \mu_1\delta_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_1)} - \mu_2\delta_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_2)},$$

kde $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in \mathcal{W}$. Vytvoříme faktorový prostor prostoru $C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})$ podle podprostoru $\mathcal{Z}$, tj. vektorový prostor $C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})/\mathcal{Z}$.

Společně s faktorovým prostorem $C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})/\mathcal{Z}$ zde existuje kanonická projekce $p : C(\mathcal{V} \times \mathcal{W}) \to C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})/\mathcal{Z}$, pro kterou platí, že $\delta_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})} \mapsto \delta_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})} + \mathcal{Z}$.

V tuto chvíli tvrdíme, že volbou $\mathcal{U}_0 \equiv C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})/\mathcal{Z}$ a $\iota \equiv p \circ \kappa$, dostaneme požadovaný vektorový prostor a požadované bilineární zobrazení. Důkaz tohoto tvrzení spočívá v ověření, že ι je bilineární zobrazení, a že dvojice $(\mathcal{U}_0, \iota)$ splňuje požadavky (T1) a (T2).

Důkaz bilinearity zobrazení ι. Připomeňme si, že zobrazení ι jsme definovali jako složené zobrazení $p \circ \kappa$. Zřejmě je $\iota : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \to C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})/\mathcal{Z}$ a pro všechny dvojice $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ platí

$$\iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (p \circ \kappa)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = p(\kappa(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})) = p(\delta_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})}) = \delta_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})} + \mathcal{Z}.$$

Nechť $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{w} \in \mathcal{W}$, potom dostáváme

$$\begin{aligned}
\iota(\mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) &= \delta_{(\mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w})} + \mathcal{Z}, \\
\mu_1 \iota(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) + \mu_2 \iota(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) &= \mu_1(\delta_{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w})} + \mathcal{Z}) + \mu_2(\delta_{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w})} + \mathcal{Z}) = \\
&= \mu_1 \delta_{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w})} + \mathcal{Z} + \mu_2 \delta_{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w})} + \mathcal{Z} = \mu_1 \delta_{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w})} + \mu_2 \delta_{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w})} + \mathcal{Z}.
\end{aligned}$$

Rovnost pravých stran

$$\delta_{(\mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w})} + \mathcal{Z} = \mu_1 \delta_{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w})} + \mu_2 \delta_{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w})} + \mathcal{Z} \tag{3.11}$$

nastává tehdy a jen tehdy, když

$$\delta_{(\mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w})} - \mu_1 \delta_{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w})} - \mu_2 \delta_{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w})}$$

je prvkem podprostoru $\mathcal{Z}$. Protože se však jedná o jeden z jeho generátorů, zřejmě rovnost (3.11) nastává, a tudíž platí

$$\iota(\mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) = \mu_1 \iota(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) + \mu_2 \iota(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}).$$

Tím jsme dokázali, že zobrazení ι je lineární v první složce. Podobně nyní dokážeme i linearitu ve složce druhé. Máme

$$\begin{aligned}
\iota(\boldsymbol{v}, \mu_1 \boldsymbol{w}_1 + \mu_2 \boldsymbol{w}_2) &= \delta_{(\boldsymbol{v}, \mu_1 \boldsymbol{w}_1 + \mu_2 \boldsymbol{w}_2)} + \mathcal{Z}, \\
\mu_1 \iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1) + \mu_2 \iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2) &= \mu_1(\delta_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1)} + \mathcal{Z}) + \mu_2(\delta_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2)} + \mathcal{Z}) = \\
&= \mu_1 \delta_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1)} + \mathcal{Z} + \mu_2 \delta_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2)} + \mathcal{Z} = \mu_1 \delta_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1)} + \mu_2 \delta_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2)} + \mathcal{Z}.
\end{aligned}$$

Rovnost pravých stran

$$\delta_{(\boldsymbol{v}, \mu_1 \boldsymbol{w}_1 + \mu_2 \boldsymbol{w}_2)} + \mathcal{Z} = \mu_1 \delta_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1)} + \mu_2 \delta_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2)} + \mathcal{Z} \tag{3.12}$$

zde opět nastává pouze v případě, kdy

$$\delta_{(\boldsymbol{v}, \mu_1 \boldsymbol{w}_1 + \mu_2 \boldsymbol{w}_2)} - \mu_1 \delta_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1)} - \mu_2 \delta_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2)}$$

je prvkem podprostoru $\mathcal{Z}$. Protože se rovněž jedná o jeden z generátorů podprostoru $\mathcal{Z}$, rovnost (3.12) je splněna, a tudíž platí

$$\iota(\boldsymbol{v}, \mu_1 \boldsymbol{w}_1 + \mu_2 \boldsymbol{w}_2) = \mu_1 \iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1) + \mu_2 \iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2).$$

Zobrazení ι je lineární i ve druhé složce.

Dohromady tak dostáváme

$$\iota(\mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) = \mu_1 \iota(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) + \mu_2 \iota(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}), \tag{3.13}$$

$$\iota(\boldsymbol{v}, \mu_1 \boldsymbol{w}_1 + \mu_2 \boldsymbol{w}_2) = \mu_1 \iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1) + \mu_2 \iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2), \tag{3.14}$$

čímž dokazujeme, že zobrazení ι je bilineární zobrazení.

Ověření vlastnosti (T1). Podmínka (T1) ve větě 4 požaduje, že vektorový prostor $\mathcal{U}_0$ je generován obrazy prvků $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ v zobrazení ι. Protože $\mathcal{U}_0 \equiv C(\mathcal{V}\times\mathcal{W})/\mathcal{Z}$ a $\iota \equiv p\circ\kappa$, bude naším úkolem ukázat vzájemný vztah mezi prvky prostoru $C(\mathcal{V}\times\mathcal{W})/\mathcal{Z}$ s prvky z prostoru $\langle \operatorname{Im}\iota\rangle$.

Nejdříve se podívejme, jaký tvar mají prvky prostoru $\langle \operatorname{Im}\iota\rangle$. Využijeme k tomu definici lineárního obalu uvedenou v publikaci [**36**, s. 85].[4] Podle této definice je

$$\langle \operatorname{Im}\iota\rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \iota(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_i); n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \dots, n\} : \alpha_i \in \mathbb{K} \wedge \iota(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_i) \in \operatorname{Im}\iota \right\}.$$

Protože $\iota = p \circ \kappa$, může být libovolný prvek $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \iota(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_i)$ přepsán do tvaru

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \iota(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_i) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (p\circ\kappa)(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p(\kappa(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_i)) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p(\delta_{(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_i)}) = p\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_i)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_i)} + \mathcal{Z}.\end{aligned}$$

Funkce $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_i)} + \mathcal{Z}$ je prvkem faktorového prostoru $C(\mathcal{V}\times\mathcal{W})/\mathcal{N}$. Naopak ke každé funkci z faktorového prostoru $C(\mathcal{V}\times\mathcal{W})/\mathcal{N}$ umíme nalézt příslušný vektor z prostoru $\langle \operatorname{Im}\iota\rangle$. Celkem tak dostáváme

$$\langle \operatorname{Im}\iota\rangle = C(\mathcal{V}\times\mathcal{W})/\mathcal{N},$$

což jsme chtěli dokázat.

Ověření vlastnosti (T2). Důkaz dokončíme ověřením, že pro každé bilineární zobrazení $\phi \in \mathscr{L}(\mathcal{V}\times\mathcal{W}, \mathcal{U})$ existuje lineární zobrazení $F : C(\mathcal{V}\times\mathcal{W})/\mathcal{Z} \to \mathcal{U}$ takové, že $\phi = F \circ \iota$. Tedy nalezneme takové zobrazení F, aby následující diagram (3.15) byl komutativní.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}\times\mathcal{W} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\kappa"] \arrow[dd, bend right, "\iota"'] & \mathcal{U} \\
C(\mathcal{V}\times\mathcal{W}) \arrow[ur, "\psi"] \arrow[d, "p"] & \\
C(\mathcal{V}\times\mathcal{W})/\mathcal{Z} \arrow[uur, dotted, "F"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.15}$$

Přeformulujme na náš konkrétní případ tvrzení ve větě 2 o univerzální vlastnosti faktorového prostoru. Máme vektorový prostor $C(\mathcal{V}\times\mathcal{W})$ nad tělesem $\mathbb{K}$ a vektorový podprostor prostoru $C(\mathcal{V}\times\mathcal{W})$ označený $\mathcal{Z}$. Faktorový prostor $C(\mathcal{V}\times\mathcal{W})/\mathcal{Z}$ má následující univerzální vlastnost. Jestliže $\mathcal{U}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$ a $\psi : C(\mathcal{V}\times\mathcal{W}) \to \mathcal{U}$ je lineární zobrazení, jehož jádro $\operatorname{Ker}\psi$ obsahuje podprostor

[4] Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$. Potom

$$\langle\mathcal{X}\rangle = \{a_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{x}_n; n \in \mathbb{N} \,\&\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K} \,\&\, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathcal{X}\}.$$

$\mathcal{Z}$, potom existuje jednoznačně lineární zobrazení $F : C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})/\mathcal{Z} \to \mathcal{U}$ takové, že $\psi = F \circ p$, kde $p : C(\mathcal{V} \times \mathcal{W}) \to C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})/\mathcal{Z}$ je kanonická projekce prostoru $C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})$ na faktorový prostor $C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})/\mathcal{Z}$.

Jelikož vektorový prostor $\mathcal{U}$ nad tělesem $\mathbb{K}$ je určen a zobrazení ψ existuje z univerzální vlastnosti formálního lineárního obalu (věta 3), musíme pro použití této věty ještě ověřit inkluzi $\mathcal{Z} \subset \operatorname{Ker} \psi$. Bude-li inkluze splněna, pak univerzální vlastnost faktorového prostoru dokončí důkaz existence lineárního zobrazení F.

Chceme dokázat, že jestliže $f_{\mathcal{Z}}$ je prvkem podprostoru $\mathcal{Z}$, pak $\psi(f_{\mathcal{Z}}) = \boldsymbol{o}$. Podíváme-li se, jakým způsobem jsou generovány prvky podprostoru $\mathcal{Z}$, můžeme libovolný z nich napsat ve tvaru

$$\lambda_1 \left(\delta_{(\mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w})} - \mu_1 \delta_{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w})} - \mu_2 \delta_{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w})}\right) + \lambda_2 \left(\delta_{(\boldsymbol{v}, \mu_1 \boldsymbol{w}_1 + \mu_2 \boldsymbol{w}_2)} - \mu_1 \delta_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1)} - \mu_2 \delta_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2)}\right),$$

kde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

S využitím linearity zobrazení ψ dostáváme

$$\begin{aligned} \psi(f_{\mathcal{Z}}) = \lambda_1 \psi(\delta_{(\mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w})}) - \lambda_1 \mu_1 \psi(\delta_{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w})}) - \lambda_1 \mu_2 \psi(\delta_{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w})}) \\ + \lambda_2 \psi(\delta_{(\boldsymbol{v}, \mu_1 \boldsymbol{w}_1 + \mu_2 \boldsymbol{w}_2)}) - \lambda_2 \mu_1 \psi(\delta_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1)}) - \lambda_2 \mu_2 \psi(\delta_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2)}). \end{aligned}$$

Zobrazení ψ jsme definovali tak, že pro libovolnou funkci $\delta_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})} \in C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})$ platí $\psi(\delta_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})}) = \phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$. Přepíšeme-li zobrazení ψ pomocí zobrazení ϕ, dostáváme

$$\begin{aligned} \psi(f_{\mathcal{Z}}) = \lambda_1 \phi(\mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) - \lambda_1 \mu_1 \phi(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) - \lambda_1 \mu_2 \phi(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) \\ + \lambda_2 \phi(\boldsymbol{v}, \mu_1 \boldsymbol{w}_1 + \mu_2 \boldsymbol{w}_2) - \lambda_2 \mu_1 \phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1) - \lambda_2 \mu_2 \phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2). \end{aligned}$$

Jelikož je zobrazení ϕ bilineární, lze výraz dále upravovat a platí

$$\begin{aligned} \psi(f_{\mathcal{Z}}) = \lambda_1 \mu_1 \phi(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) + \lambda \mu_2 \phi(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) - \lambda_1 \mu_1 \phi(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) - \lambda_1 \mu_2 \phi(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) \\ + \lambda_2 \mu_1 \phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1) + \lambda_2 \mu_2 \phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2) - \lambda_2 \mu_1 \phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1) - \lambda_2 \mu_2 \phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2) = \boldsymbol{o}. \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali, že obraz $\psi(f_{\mathcal{Z}})$ libovolné funkce $f_{\mathcal{Z}} \in \mathcal{Z}$ je nulový vektor $\boldsymbol{o}$, a tudíž $\mathcal{Z} \subset \operatorname{Ker} \psi$. Z univerzální vlastnosti faktorového prostoru pak dostáváme existenci lineárního zobrazení F a tím je podmínka (T2) dokázána.

V předloženém důkazu jsme zkonstruovali vektorový prostor $\mathcal{U}_0$ a bilineární zobrazení ι splňující podmínky (T1) a (T2). Společně s již dříve provedeným důkazem jednoznačnosti dvojice $(\mathcal{U}_0, \iota)$, jsme podali úplný důkaz věty 4 o linearizaci bilineárního zobrazení. $\square$

1.4. Důkaz existence dvojice $(\mathcal{U}_0, \iota)$ pro vektorové prostory $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ konečné dimenze. Důkaz existence, který jsme nyní podali, je univerzální, neboť zastřešuje případy jak vektorových prostorů konečné dimenze, tak vektorových prostorů, které konečné dimenze nejsou. Důkaz vychází z konstrukce tenzorového součinu modulů, který čtenář může nalézt zpracovaný například v textu [**5**, s. 7-9] nebo v publikaci

[**35**, s. 370-371]. Pro vektorové prostory je pak důkaz, v této bakalářské práci autorem podrobněji rozvedený, uveden v knihách [**19**, s. 9-11] nebo [**20**, s. 24-25].

Budeme-li uvažovat, že vektorové prostory $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ a $\mathcal{U}$ nad tělesem $\mathbb{K}$ jsou konečné dimenze, lze důkaz existence provést dalším, velmi užitečným způsobem.

Důkaz. Nechť $\mathcal{V}^*$ je duální vektorový prostor k prostoru $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}^*$ je duální vektorový prostor k prostoru $\mathcal{W}$. Uvažujme vektorový prostor všech bilineárních forem na $\mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*$, tj. prostor $\mathscr{L}(\mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*, \mathbb{K})$, a položme

$$\mathcal{U}_0 = \mathscr{L}(\mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*, \mathbb{K}).$$

Zvolme vektory $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{w} \in \mathcal{W}$ pevně. Poté zobrazení $\mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^* \to \mathbb{K}$ definované pro každou dvojici lineárních forem $(f, g) \in \mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*$ předpisem $(f, g) \mapsto f(\boldsymbol{v})g(\boldsymbol{w})$ je bilineární. Důkaz bilinearity provedeme následovně. Nechť $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$, $f, f^1, f^2 \in \mathcal{V}^*$, $g, g^1, g^2 \in \mathcal{W}^*$, potom využitím linearity jednotlivých funkcionálů dostáváme

$$(\mu_1 f^1 + \mu_2 f^2)(\boldsymbol{v})g(\boldsymbol{w}) = [\mu_1 f^1(\boldsymbol{v}) + \mu_2 f^2(\boldsymbol{v})]g(\boldsymbol{w}) = \mu_1 f^1(\boldsymbol{v})g(\boldsymbol{w}) + \mu_2 f^2(\boldsymbol{v})g(\boldsymbol{w}),$$
$$f(\boldsymbol{u})(\mu_1 g^1 + \mu_2 g^2)(\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v})[\mu_1 g^1(\boldsymbol{w}) + \mu_2 g^2(\boldsymbol{w})] = \mu_1 f(\boldsymbol{v})g^1(\boldsymbol{w}) + \mu_2 f(\boldsymbol{v})g^2(\boldsymbol{w}).$$

Označme výše popsanou bilineární formu jako $\iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$. Zobrazení $\iota : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \to \mathcal{U}_0$ je bilineární zobrazení, které každému prvku $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ přiřadí bilineární formu $\iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) : \mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^* \to \mathbb{K}$, definovanou pro každou dvojici $(f, g) \in \mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*$ předpisem $[\iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})](f, g) = f(\boldsymbol{u})g(\boldsymbol{w})$. Bilinearitu zobrazení ι je nutné ověřit. Volme libovolně, ale pevně $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in \mathcal{W}$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$. Potom pro libovolnou dvojici $(f, g) \in \mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*$ platí

$$\begin{aligned}
[\iota(\mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w})](f, g) &= f(\mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2)g(\boldsymbol{w}) = [\mu_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \mu_2 f(\boldsymbol{v}_2)]g(\boldsymbol{w}) = \\
&= \mu_1 f(\boldsymbol{v}_1)g(\boldsymbol{w}) + \mu_2 f(\boldsymbol{v}_2)g(\boldsymbol{w}) = [\mu_1 \iota(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w})](f, g) + [\mu_2 \iota(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w})](f, g) = \\
&= [\mu_1 \iota(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) + \mu_2 \iota(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w})](f, g).
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\iota(\mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) = \mu_1 \iota(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) + \mu_2 \iota(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}),$$

čímž dokazujeme linearitu zobrazení ι v první složce.

Podobně pro libovolnou dvojici $(f, g) \in \mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*$ platí

$$\begin{aligned}
[\iota(\boldsymbol{v}, \mu_1 \boldsymbol{w}_1 + \mu_2 \boldsymbol{w}_2)](f, g) &= f(\boldsymbol{v})g(\mu_1 \boldsymbol{w}_1 + \mu_2 \boldsymbol{w}_2)) = f(\boldsymbol{v})[\mu_1 g(\boldsymbol{w}_1) + \mu_2 g(\boldsymbol{w}_1)] = \\
&= \mu_1 f(\boldsymbol{v})g(\boldsymbol{w}_1) + \mu_2 f(\boldsymbol{v})g(\boldsymbol{w}_2) = [\mu_1 \iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1)](f, g) + [\mu_2 \iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2)](f, g) = \\
&= [\mu_1 \iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1) + \mu_2 \iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2)](f, g).
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\iota(\boldsymbol{v}, \mu_1 \boldsymbol{w}_1 + \mu_2 \boldsymbol{w}_2) = \mu_1 \iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1) + \mu_2 \iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2),$$

čímž je i linearita zobrazení ι ve druhé složce dokázána. Zobrazení ι je tudíž bilineární.

V této chvíli zbývá ukázat, že dvojice $(\mathcal{U}_0, \iota)$ splňuje vlastnosti (T1) a (T2).

Zvolme v prostoru $\mathcal{V}$ bázi $\mathcal{M} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ a v prostoru $\mathcal{W}$ bázi $\mathcal{N} = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$. Nechť $\mathcal{M}^* = \{f^1, \ldots, f^n\}$ je duální bází k bázi $\mathcal{M}$ v duálním vektorovém prostoru $\mathcal{V}^*$ a $\mathcal{N}^* = \{g^1, \ldots, g^m\}$ je duální bází k bázi $\mathcal{N}$ v duálním prostoru $\mathcal{W}^*$.

Pro libovolný vektor $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ existují skaláry $\alpha^1, \ldots, \alpha^n \in \mathbb{K}$ takové, že $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n \alpha^i \boldsymbol{v}_i$. Podobně pro libovolný vektor $\boldsymbol{w} \in \mathcal{W}$ existují skaláry $\beta^1, \ldots, \beta^m \in \mathbb{K}$ takové, že $\boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^m \beta^j \boldsymbol{w}_j$. Využitím bilinearity zobrazení ι dostáváme pro obraz libovolné dvojice $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$

$$\iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \iota\left(\sum_{i=1}^n \alpha^i \boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^m \beta^j \boldsymbol{w}_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha^i \beta^j \iota(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_j).$$

Obraz libovolné dvojice $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ lze tudíž napsat jako lineární kombinaci obrazů mn dvojic $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, kde $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Lineární obal množiny $\operatorname{Im} \iota$ lze zapsat následujícím způsobem

$$\langle \operatorname{Im} \iota \rangle = \left\{ \sum_{i,j} \gamma^{ij} \iota(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_j); \gamma^{ij} \in \mathbb{K}, i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\} \right\}.$$

Chceme dokázat, že $\mathcal{U}_0 = \langle \operatorname{Im} \iota \rangle$. Zvolme proto v prostoru $\mathscr{L}(\mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*, \mathbb{K})$ množinu bilineárních funkcionálů $\{\Psi_{ij}\}_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$, kde formu Ψ_{ij} definujeme takto

$$\Psi_{ij}(f^k, g^l) = \begin{cases} 1 & \text{pro } (i = k) \wedge (j = l), \\ 0 & \text{pro } (i \neq k) \vee (j \neq l). \end{cases}$$

Dokážeme, že množina $\{\Psi_{ij}\}_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$ tvoří bázi prostoru $\mathscr{L}(\mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*, \mathbb{K})$.

Lineární nezávislost jednotlivých funkcionálů plyne již z jejich definice. Zbývá proto ukázat, že množina $\{\Psi_{ij}\}_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$ generuje prostor $\mathscr{L}(\mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*, \mathbb{K})$.

Každou lineární formu z duálního prostoru konečné dimenze lze napsat právě jedním způsobem, jako lineární kombinaci bázových kovektorů. Tudíž každý bilineární funkcionál definovaný na kartézském součinu $\mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*$ je jednoznačně určen obrazy dvojic $(f^k, g^l) \in \mathcal{M}^* \times \mathcal{N}^*$, kde $1 \le k \le n$ a $1 \le j \le m$.

Nechť $B : \mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^* \to \mathbb{K}$ je libovolná bilineární forma. Pro libovolný kovektor $f \in \mathcal{V}^*$ existují koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ takové, že $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f^i$. Podobně pro libovolnou formu $g \in \mathcal{W}^*$ existují koeficienty $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{K}$ takové, že $g = \sum_{j=1}^m \beta_j g^j$. Potom platí

$$B(f, g) = B\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i, \sum_{j=1}^m \beta_j g^j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j B(f^i, g^j).$$

Funkční hodnotu $B(f^i, g^j)$ označme γ_{ij}. Potom dostáváme

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j B(f^i, g^j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \left(\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m \gamma_{lk} \Psi_{lk}\right)(f^i, g^j),$$

což vyjadřuje skutečnost, že každá bilineární forma lze napsat jako lineární kombinace funkcionálů $\{\Psi_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$. Množina $\{\Psi_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$ tudíž generuje prostor $\mathscr{L}(\mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*, \mathbb{K})$.

Důkaz podmínky (T1) dokončuje zvolení $\Psi_{ij} = \iota(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_j)$. Každou bilineární formu lze odtud napsat jako lineární kombinaci forem $\iota(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_j)$, a tudíž $\mathcal{U}_0 = \langle \operatorname{Im} \iota \rangle$.

Poznámka 11. Volba $\Psi_{ij} = \iota(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_j)$ je skutečně velice přirozená. Protože báze $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}^*$, resp. $\mathcal{N}$ a $\mathcal{N}^*$, jsou vůči sobě duální, platí

$$\Psi_{ij}(f^k, g^l) = [\iota(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_k)](f^k, g^l) = f^k(\boldsymbol{v}_i) g^l(\boldsymbol{w}_j) = \delta_i^k \delta_j^l.$$

Součin $\delta_i^k \delta_j^l$ je roven jedné právě tehdy, když $(i = k) \wedge (j = l)$, a je roven nule, pokud $(i \neq k) \vee (j \neq l)$, což přesně souhlasí s definicí funkcionálů Ψ_{ij}.

Nechť ϕ je libovolné bilineární zobrazení z prostoru $\mathscr{L}(\mathcal{V} \times \mathcal{W}, \mathcal{U})$. Chceme dokázat podmínku (T2), tj. nalézt lineární zobrazení $F : \mathscr{L}(\mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*, \mathbb{K}) \to \mathcal{U}$ takové, že následující diagram (3.16) komutuje.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V} \times \mathcal{W} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathcal{U} \\
\mathscr{L}(\mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*, \mathbb{K}) \arrow[ur, dotted, "F"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.16}$$

Jak jsme ukázali, množina bilineárních funkcionálů $\{\Psi_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathscr{L}(\mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*, \mathbb{K})$. Lineární zobrazení F můžeme proto jednoznačně definovat pomocí obrazů bázových forem jako $F(\Psi_{ij}) = \phi(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_j)$.

Tím jsem dokázali i podmínku (T2) a dokončili tak důkaz existence dvojice $(\mathcal{U}_0, \iota)$ pro vektorové prostory konečné dimenze. □

Mnohem důležitější je poznatek o tom, jakou strukturu má v případě prostorů $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ konečné dimenze vektorový prostor $\mathcal{U}_0$. Ukázali jsme, že prvky prostoru $\mathcal{U}_0$ jsou bilineární formy na $\mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*$.

Důkaz existence, využívající vytvoření formálního lineárního obalu, je platný i pro vektorové prostory konečné dimenze. Technika důkazu totiž není závislá na volbě báze. Z toho vyplývá, že pro vektorový prostor $\mathcal{U}_0$ máme dvě různé definice. Jednak máme $\mathcal{U}_0 = C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})/\mathcal{N}$ a jednak $\mathcal{U}'_0 = \mathscr{L}(\mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*, \mathbb{K})$. Podle druhé části věty 4 pak nutně existuje izomorfismus $F_0 : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}'_0$. Každému prvku z prostoru $C(\mathcal{V} \times \mathcal{W})/\mathcal{N}$ lze přiřadit bilineární formu z prostoru $\mathscr{L}(\mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*, \mathbb{K})$.

2. Definice tenzorového součinu vektorových prostorů

Koncept linearizace bilineárního zobrazení, který jsme studovali v předchozí podkapitole, nám nyní umožňuje formálně definovat pojem tenzorový součin vektorových prostorů.

Definice 7 (Tenzorový součin vektorových prostorů)**.** Nechť $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$. Dvojice $(\mathcal{U}_0, \iota)$, která obsahuje vektorový prostor $\mathcal{U}_0$ nad tělesem $\mathbb{K}$ a bilineární zobrazení $\iota : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \to \mathcal{U}_0$, splňující podmínky (T1) a (T2) dle věty 4, se nazývá *tenzorový součin vektorových prostorů* $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$. Zobrazení ι nazýváme *tenzorovým součinem*. Píšeme $\mathcal{U}_0 = \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ a $\iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \otimes(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$.

Poznámka 12. Mluvíme-li o tenzorovém součinu, je třeba rozlišovat, zda máme na mysli tenzorový součin vektorových prostorů, nebo tenzorový součin jako zobrazení. Symbol $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$ často čteme jako tenzorový součin vektorů $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$.

Formálně je podle definice 7 tenzorovým součinem vektorových prostorů $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ dvojice $(\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}, \otimes)$. Často se však pro zjednodušení hovoří pouze o vektorovém prostoru $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ jako o tenzorovém součinu vektorových prostorů a zobrazení $\otimes$ se implicitně předpokládá.

2.1. Vlastnosti tenzorového součinu. Tenzorový součin $\otimes$ je bilineární zobrazení. Tato skutečnost plyne z bilinearity zobrazení ι. Pro úplnost zde vlastnosti (3.13) a (3.14) přepišme v nově zavedené symbolice. Nechť $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in \mathcal{W}$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$, potom platí

$$(\mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2) \otimes \boldsymbol{w} = \mu_1(\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{w}) + \mu_2(\boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{w}), \tag{3.17}$$

$$\boldsymbol{v} \otimes (\mu_1 \boldsymbol{w}_1 + \mu_2 \boldsymbol{w}_2) = \mu_1(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}_1) + \mu_2(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}_2). \tag{3.18}$$

Tenzorový součin $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ vektorových prostorů $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ nad tělesem $\mathbb{K}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$ (společně s bilineárním zobrazením $\otimes$, které dle poznámky 12 explicitně nezdůrazňujeme). Obecně jsou prvky tohoto prostoru konečné lineární kombinace $\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{w}_2 + \ldots + \boldsymbol{v}_n \otimes \boldsymbol{w}_n$, pro libovolný výběr n vektorů $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathcal{V}$, resp. $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \in \mathcal{W}$.

Jsou-li $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ vektorové prostory konečné dimenze nad tělesem $\mathbb{K}$, potom platí $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} = \mathscr{L}(\mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*, \mathbb{K})$ a prvky prostoru $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ chápeme jako bilineární formy na $\mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*$.

Poznámka 13. Záměrně oddalujeme zavedení pojmu *tenzor*, byť jsme v rozdělení na začátku kapitoly uvedli, že tenzorem rozumíme prvek tenzorového součinu vektorových prostorů. V praxi je totiž běžnější definovat tenzor jako prvek tenzorového součinu vektorového prostoru $\mathcal{V}$ sama se sebou, tj. prostoru $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$, popř. s jeho duálem $\mathcal{V}^*$. Protože se zatím zabýváme tenzorovými součiny dvou obecně různých vektorových prostorů $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$, ponecháme zavedení pojmu tenzor na později. Budeme proto nadále používat „neutrálního“ pojmu prvek vektorového prostoru $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$, popř. bilineární forma, pokud $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ budou vektorové prostory konečné dimenze.

2.1.1. *Báze tenzorového součinu prostorů $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ konečné dimenze.* Z důkazu existence dvojice $(\mathcal{U}_0, \iota)$ pro vektorové prostory $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ konečné dimenze v části 1.4 dostáváme okamžitě následující tvrzení o bázi tenzorového součinu $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$.

Věta 5 (Báze tenzorového součinu $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$)**.** [**20**, s. 8] *Nechť $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ je báze vektorového prostoru $\mathcal{V}$, $\{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m\}$ je báze vektorového prostoru $\mathcal{W}$. Potom množina*

$$\mathscr{B} = \{\boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{w}_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

tvoří bázi tenzorového součinu $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$. Tedy $\dim \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} = \dim \mathcal{V} \cdot \dim \mathcal{W}$.

Jsou-li vektorové prostory $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ konečné dimenze, pak každý prvek $\boldsymbol{T}$ z prostoru $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ lze zapsat právě jedním způsobem jako lineární kombinace

$$\boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} T^{ij} \boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{w}_j.$$

Koeficienty $T^{ij} \in \mathbb{K}$ nazýváme *souřadnicemi* $\boldsymbol{T}$ vzhledem k bázi $\mathscr{B}$. Přirozeným způsobem postupně zavedeme pro prvky $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T} \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ pojmy *rovnost*, *součet* a *násobení skalárem*

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{T} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} \forall j \in \{1, \dots, m\} : S^{ij} = T^{ij}, \tag{3.19}$$

(vzhledem k téže bázi $\mathscr{B}$)

$$\boldsymbol{S} + \boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (S^{ij} + T^{ij}) \boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{w}_j, \tag{3.20}$$

$$\lambda \boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda T^{ij} \boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{w}_j. \tag{3.21}$$

2.1.2. *Tenzorový součin a dualita.* Jsou-li vektorové prostory $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ konečné dimenze, pak existuje kanonický izomorfismus takový, že $\mathcal{V} \simeq \mathcal{V}^{**}$, resp. $\mathcal{W} \simeq \mathcal{W}^{**}$. Ten nám umožňuje ztotožnit každý vektor $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ s lineární formou $\widehat{\boldsymbol{v}} : \mathcal{V}^* \to \mathbb{K}$, kde $\widehat{\boldsymbol{v}}(f) = f(\boldsymbol{v})$ pro $f \in \mathcal{V}^*$ [**36**, s. 661]. Jak jsme si dříve ukázali, prostory $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}^{**}$, resp. $\mathcal{W}$ a $\mathcal{W}^{**}$, považujeme za totožné, a proto nerozlišujeme mezi prvky $\boldsymbol{v}$ a $\widehat{\boldsymbol{v}}$. Potom platí

$$\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{W}^* \simeq \mathscr{L}((\mathcal{V}^*)^* \times (\mathcal{W}^*)^*, \mathbb{K}) \simeq \mathscr{L}(\mathcal{V} \times \mathcal{W}, \mathbb{K}), \tag{3.22}$$

$$\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{W} \simeq \mathscr{L}((\mathcal{V}^*)^* \times \mathcal{W}^*, \mathbb{K}) \simeq \mathscr{L}(\mathcal{V} \times \mathcal{W}^*, \mathbb{K}), \tag{3.23}$$

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}^* \simeq \mathscr{L}(\mathcal{V}^* \times (\mathcal{W}^*)^*, \mathbb{K}) \simeq \mathscr{L}(\mathcal{V}^* \times \mathcal{W}, \mathbb{K}). \tag{3.24}$$

Jestliže vektorový prostor $\mathcal{V}$ není konečné dimenze, pak prostory $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}^{**}$ nejsou izomorfní. V takovém případě hovoříme o *kanonickém vnoření* $\mathcal{V}^{**}$ do $\mathcal{V}$.

Protože se ve všech výše uvedených případech jedná o prostory bilineárních forem, má cenu tyto formy vyčíslovat na vektorech a kovektorech.

V části 1.4 jsme bilineární formu $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ definovali pro $(f, g) \in \mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*$ předpisem $(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w})(f, g) = f(\boldsymbol{v})g(\boldsymbol{w})$.

S využitím duality ztotožníme vektory z prostoru $\mathcal{V}$ s lineárními formami na $\mathcal{V}^*$, tj. s prvky druhého duálu $\mathcal{V}^{**}$ následujícím způsobem. Nechť $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$, $f \in \mathcal{V}^*$, potom

$$\langle f, \boldsymbol{v}\rangle = f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}(f) = \langle \boldsymbol{v}, f\rangle .$$

Takto zavedené lomené závorky jsou také bilineární formou $\langle \cdot, \cdot\rangle : \mathcal{V}^* \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$, kterou nazýváme *párování*. Potom platí

$$(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w})(f, g) = f(\boldsymbol{v})g(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}(f)\boldsymbol{w}(g) = (f \otimes g)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}),$$

a podobně

$$(f \otimes \boldsymbol{w})(\boldsymbol{v}, g) = f(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}(g) = \boldsymbol{v}(f)g(\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v} \otimes g)(f, \boldsymbol{w}).$$

Celkově můžeme díky dualitě psát

$$(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w})(f, g) = (\boldsymbol{v} \otimes g)(f, \boldsymbol{w}) = (f \otimes g)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (f \otimes \boldsymbol{w})(\boldsymbol{v}, g).$$

Nechť $\mathcal{M} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ je báze $\mathcal{V}$, $\mathcal{N} = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ je báze $\mathcal{W}$. Dále nechť $\mathcal{M}^* = \{f^1, \ldots, f^n\}$ je duální báze k bázi $\mathcal{M}$ v prostoru $\mathcal{V}^*$, $\mathcal{N}^* = \{g^1, \ldots, g^m\}$ je duální báze k bázi $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{W}^*$. Potom platí

$$\boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} T^{ij}\boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{w}_j, \quad \boldsymbol{T} \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}, \qquad \boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} T_i^j f^i \otimes \boldsymbol{w}_j, \quad \boldsymbol{T} \in \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{W},$$
$$\boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} T_{ij} f^i \otimes g^j, \quad \boldsymbol{T} \in \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{W}^*, \qquad \boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} T_j^i \boldsymbol{v}_i \otimes g^j, \quad \boldsymbol{T} \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}^*.$$

Každá bilineární forma je tudíž jednoznačně určena svými souřadnicemi. Protože mají souřadnice právě dva indexy, lze každé bilineární formě přiřadit matici typu $n \times m$, kde se na pozici ij nachází ij-tá souřadnice.

Je však důležité poznamenat, že vždy, když bilineární formu určujeme pomocí matice, je nutné podat informaci o tom, v jakém tenzorovém součinu vektorových prostorů se daná forma nachází a vůči které bázi jsou její souřadnice uvedeny. Jedině poté můžeme správně interpretovat hodnoty v matici. Poloha indexů souřadnic je totiž velice důležitá.

Příklad 4. V následující tabulce jsou zaznamenány konkrétní příklady tenzorových součinů vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ se sebou samým a s jeho duálem $(\mathbb{R}^2)^*$ v různém pořadí.

Ke každému tenzorovému součinu je pak uveden příslušný prostor bilineárních funkcionálů a nějaký příklad bilineární formy, která se v daném tenzorovém součinu nachází. Ve čtvrtém sloupci je uveden tvar, jaký mají souřadnice bilineární formy v daném tenzorovém součinu (jaká je poloha jejich indexů). V posledním sloupci je maticová reprezentace dané bilineární formy ze třetího sloupce.

Poznamenejme, že $\mathcal{K} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ je standardní báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$; množina $\mathcal{K}^* = \{f^1, f^2\}$ je báze prostoru $(\mathbb{R}^2)^*$ duální k bázi $\mathcal{K}$.

$\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$	$\mathscr{L}(\mathcal{V}^*\times\mathcal{W}^*,\mathbb{K})$	$\boldsymbol{T}\in\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$	T^{ij}	(T^{ij})
$\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^2$	$\mathscr{L}((\mathbb{R}^2)^*\times(\mathbb{R}^2)^*,\mathbb{R})$	$2\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2$	T^{ij}	$\begin{pmatrix}2 & -4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$
$(\mathbb{R}^2)^*\otimes(\mathbb{R}^2)^*$	$\mathscr{L}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$	$f^2\otimes f^1+3f^2\otimes f^2$	T_{ij}	$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$
$(\mathbb{R}^2)^*\otimes\mathbb{R}^2$	$\mathscr{L}(\mathbb{R}^2\times(\mathbb{R}^2)^*,\mathbb{R})$	$f^1\otimes\boldsymbol{e}_1-7f^1\otimes\boldsymbol{e}_2+2f^2\otimes\boldsymbol{e}_1$	T_i^j	$\begin{pmatrix}1 & -7\\ 2 & 0\end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2\otimes(\mathbb{R}^2)^*$	$\mathscr{L}((\mathbb{R}^2)^*\times\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$	$4\boldsymbol{e}_2\otimes f^1+(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\otimes f^2$	T_i^j	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

Na závěr příkladu doplňme, že zobrazení $\iota\equiv\otimes:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathscr{L}((\mathbb{R}^2)^*\times(\mathbb{R}^2)^*,\mathbb{R})$ je bilineární zobrazení, které dvojici vektorů $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ přiřazuje bilineární formu $\iota(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\in\mathscr{L}((\mathbb{R}^2)^*\times(\mathbb{R}^2)^*,\mathbb{R})$, pro kterou platí $(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})(f,g)=f(\boldsymbol{u})g(\boldsymbol{v})$. Užitím poznatků z části 2.1.2 lze popsat zobrazení ι pro každý příklad uvedený v tabulce.

Následující věta je výsledkem studovaného konceptu linearizace bilineárního zobrazení. Ve stručnosti vyjadřuje, že namísto studia bilineárních zobrazení na $\mathcal{V}\times\mathcal{W}$ můžeme studovat lineární zobrazení na $\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}$.

Věta 6 (O izomorfismu $\mathscr{L}(\mathcal{V}\times\mathcal{W},\mathcal{U})\simeq\operatorname{Hom}(\mathcal{V}\otimes\mathcal{W},\mathcal{U})$)**.** *Nechť $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ a $\mathcal{U}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$. Potom*

$$\mathscr{L}(\mathcal{V}\times\mathcal{W},\mathcal{U})\simeq\operatorname{Hom}(\mathcal{V}\otimes\mathcal{W},\mathcal{U}).$$

Důkaz. Definujme zobrazení, které každému homomorfismu $F\in\operatorname{Hom}(\mathcal{V}\otimes\mathcal{W},\mathcal{U})$ přiřadí bilineární zobrazení ϕ_F z prostoru $\mathscr{L}(\mathcal{V}\times\mathcal{W},\mathcal{U})$ podle předpisu $\phi_F=F\circ\iota$.

Díky větě 4 o linearizaci bilineárního zobrazení a k ní odvozené podmínce (T) víme, že ke každému bilineárnímu zobrazení $\phi\in\mathscr{L}(\mathcal{V}\times\mathcal{W},\mathcal{U})$ existuje právě jedno lineární zobrazení $F\in\operatorname{Hom}(\mathcal{V}\otimes\mathcal{W},\mathcal{U})$ takové, že $\phi=F\circ\iota$. Přiřazení $F\mapsto\phi_F$ je proto bijekce. Zbývá se pouze přesvědčit, zda se jedná o lineární zobrazení.

Nechť $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\in\mathcal{V}\times\mathcal{W}$, $\lambda\in\mathbb{K}$, $\iota(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}$, $F,F_1,F_2\in\operatorname{Hom}(\mathcal{V}\otimes\mathcal{W},\mathcal{U})$. Potom

$$\begin{aligned}\phi_{\lambda F}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})&=(\lambda F)(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})=\lambda F(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})=\lambda\phi_F(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}),\\ \phi_{F_1+F_2}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})&=(F_1+F_2)(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})=F_1(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})+F_2(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})=\\ &=\phi_{F_1}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})+\phi_{F_2}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=(\phi_{F_1}+\phi_{F_2})(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}).\end{aligned}$$

Dohromady tak dostáváme

$$\phi_{\lambda F}=\lambda\phi_F,\qquad\phi_{F_1+F_2}=\phi_{F_1}+\phi_{F_2}.$$

Zobrazení $F\mapsto\phi_F$ je tudíž lineární, prosté a „na“. Z toho vyplývá, že se jedná o izomorfismus a věta je tím dokázána. $\square$

Věta 7 (O izomorfismu 1). *Nechť $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$. Potom platí*

(1) $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \simeq \mathcal{W} \otimes \mathcal{V}$,

(2) $\mathcal{V} \otimes \mathbb{K} \simeq \mathbb{K} \otimes \mathcal{V} \simeq \mathcal{V}$,

Jsou-li navíc $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ vektorové prostory konečné dimenze a $\mathcal{V}^*$ a $\mathcal{W}^*$ prostory k nim duální, platí

(3) $(\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})^* \simeq \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{W}^*$.

Důkaz. První z uvedených tvrzení bývá označováno jako *komutativita tenzorového součinu.* K důkazu využijeme věty 4 o linearizaci bilineárního zobrazení.

Uvažujme bilineární zobrazení $\phi : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \to \mathcal{W} \otimes \mathcal{V}$. Podle věty 4 pak existuje lineární zobrazení $F : \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \to \mathcal{W} \otimes \mathcal{V}$ takové, že následující diagram komutuje.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \times \mathcal{W} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathcal{W} \otimes \mathcal{V} \\ \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \arrow[ur, dotted, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Zobrazení F je dáno předpisem $F(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v}$.

Stejně tak můžeme uvažovat bilineární zobrazení $\psi : \mathcal{W} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$, pro které existuje podle věty 4 lineární zobrazení $G : \mathcal{W} \otimes \mathcal{V} \to \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ takové, že následující diagram rovněž komutuje.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{W} \times \mathcal{V} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \\ \mathcal{W} \otimes \mathcal{V} \arrow[ur, dotted, "G"'] & \end{tikzcd}$$

Zobrazení G je dáno předpisem $G(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$.

Celkem tedy máme jednak zobrazení $F : \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \to \mathcal{W} \otimes \mathcal{V}$ a jednak zobrazení $G : \mathcal{W} \otimes \mathcal{V} \to \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$. Provedeme-li $F \circ G$, resp. $G \circ F$, dostáváme

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v} \in \mathcal{W} \otimes \mathcal{V} : \qquad & (F \circ G)(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v}) = F(G(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v})) = F(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v}, \\ \forall \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} : \qquad & (G \circ F)(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) = G(F(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w})) = F(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}. \end{aligned}$$

Odtud je zřejmé, že $F \circ G = \mathbb{1}_{\mathcal{W} \otimes \mathcal{V}}$ a současně $G \circ F = \mathbb{1}_{\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}}$. Podle lemmatu 2 je potom zobrazení F hledaný izomorfismus. Dokažme druhé tvrzení.

Nechť $\phi : \mathbb{K} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ je bilineární zobrazení dané předpisem $\phi(\alpha, \boldsymbol{v}) = \alpha \boldsymbol{v}$, kde $\alpha \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$. Potom podle věty 4 existuje vektorový prostor $\mathbb{K} \otimes \mathcal{V}$ a bilineární zobrazení $\iota : \mathbb{K} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K} \otimes \mathcal{V}$ takové, že $\iota(\alpha, \boldsymbol{v}) = \alpha \otimes \boldsymbol{v}$.

Dle tvrzení (T2) ve větě 4 existuje lineární zobrazení $F : \mathbb{K} \otimes \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ takové, že $\phi = F \circ \iota$. Pro libovolný prvek $\alpha \otimes \boldsymbol{v} \in \mathbb{K} \otimes \mathcal{V}$ platí $F(\alpha \otimes \boldsymbol{v}) = \alpha \boldsymbol{v}$. Je třeba ukázat, že F je izomorfismus.

Zobrazení F je epimorfismus (surjektivní lineární zobrazení), neboť pro každý vektor $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ existuje prvek $1 \otimes \boldsymbol{v} \in \mathbb{K} \otimes \mathcal{V}$, pro jehož obraz platí $F(1 \otimes \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$.

Nechť $\alpha\boldsymbol{v} = \beta\boldsymbol{w}$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathcal{V}$ a současně $\alpha \neq 0$. Potom $\boldsymbol{v} = \frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{w}$ a platí

$$\alpha \otimes \boldsymbol{v} = \alpha \otimes \frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{w} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\alpha\right) \otimes \boldsymbol{w} = \beta \otimes \boldsymbol{w}.$$

Odtud již dostáváme, že zobrazení F je monomorfismus (injektivní lineární zobrazení). Celkem je tedy F izomorfní zobrazení.

Tím jsme dokázali izomorfismus $\mathbb{K} \otimes \mathcal{V} \simeq \mathcal{V}$. Izomorfismus $\mathcal{V} \otimes \mathbb{K} \simeq \mathcal{V}$ bychom dokázali stejně, avšak v této chvíli již máme dokázané první tvrzení o komutativitě tenzorového součinu, a proto můžeme ihned psát

$$\mathcal{V} \otimes \mathbb{K} \simeq \mathbb{K} \otimes \mathcal{V} \simeq \mathcal{V}.$$

Tím je druhé tvrzení zcela dokázáno.

Třetí tvrzení dokážeme jednoduše použitím předešlé věty 6 a závěrů z části 2.1.2. Jestliže je $\mathcal{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$, pak prostor k němu duální je definován jako $\mathcal{V}^* = \operatorname{Hom}(\mathcal{V}, \mathbb{K})$. Aplikací těchto poznatků můžeme psát

$$(\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})^* = \operatorname{Hom}(\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}, \mathbb{K}) \simeq \mathscr{L}(\mathcal{V} \times \mathcal{W}, \mathbb{K}) \simeq \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{W}^*.$$

Jednotlivá tvrzení byla dokázána a tím je i dokázána vyslovená věta. $\square$

2.1.3. *Alternativní definice tenzorového součinu.* V této práci bylo zpracováno dle autorů publikace [**21**, s. 298] matematiky nejpoužívanější a nejabstraktnější zavedení tenzorového součinu vektorových prostorů. Zavedení tenzorového součinu vektorových prostorů je možné několika způsoby. Na závěr tohoto paragrafu si ukážeme jiný způsob, který autor v publikaci [**36**, s. 663] označuje za „pedagogicky nejstravitelnější“. Tenzorový součin zavádí následujícím způsobem.

> *Nechť $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou množiny a $\mathbb{K}$ je těleso. Tenzorovým součinem funkcí $f : \mathcal{X} \to \mathbb{K}$, $g : \mathcal{Y} \to \mathbb{K}$ nazýváme funkci $f \otimes g : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{K}$ danou předpisem*
>
> $$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$$
>
> *pro $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$.*
>
> *Tenzorovým součinem lineárních podprostorů $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{K}^{\mathcal{X}}$, $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{K}^{\mathcal{Y}}$ nazýváme lineární podprostor $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ vektorového prostoru $\mathbb{K}^{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$ generovaný všemi funkcemi $f \otimes g$, kde $f \in \mathcal{U}$, $g \in \mathcal{V}$.* [**36**, s. 663-664]

V literatuře lze rovněž nalézt přístup, kdy tenzorový součin vektorových prostorů konečné dimenze $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ nad stejným tělesem $\mathbb{K}$ přímo definujeme jako prostor bilineárních funkcionálů $\mathscr{L}(\mathcal{V}^* \times \mathcal{W}^*, \mathbb{K})$ (viz následující ukázka).

> *Nechť $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ jsou vektorové prostory konečné dimenze nad společným tělesem $\mathcal{T}$. Je-li $\overline{\mathcal{W}}$ vektorový prostor všech bilineárních funkcionálů na*

$\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, pak duální vektorový prostor $\mathcal{W}$ k prostoru $\overline{\mathcal{W}}$ nazýváme tenzorovým součinem vektorových prostorů $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ a píšeme $\mathcal{W} = \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$.(5)
[**45**, s. 1974]

Do této chvíle jsme velmi podrobně studovali pouze tenzorový součin dvou vektorových prostorů. Na následujících stranách budeme studovat rozšíření na tenzorový součin konečného systému vektorových prostorů nad tělesem $\mathbb{K}$. Ještě dříve si pojďme vyloženou teorii demonstrovat na motivačním příkladu.

Příklad 5 (Linearizace vektorového součinu)**.** Vektorovým součinem dvou vektorů $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3)^T$ a $\boldsymbol{w} = (w^1, w^2, w^3)^T$ z vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ nazýváme bilineární zobrazení $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definované předpisem

$$\times(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix}.$$

V praxi se běžně zavádí označení $\times(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$. Jak jsme již poznamenali, zobrazení $\times$ je bilineární, a proto ho má cenu linearizovat zavedením dvojice $(\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3, \iota)$ splňující podmínky (T1) a (T2) věty 4.

Naším úkolem je zkonstruovat lineární zobrazení $F : \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takové, že následující diagram komutuje.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \arrow[ur, dotted, "F"'] & \end{tikzcd} \tag{3.25}$$

Libovolný vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ je jednoznačně určen svými souřadnicemi $v^1, v^2, v^3 \in \mathbb{R}$ vzhledem k bázi $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, přičemž platí $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} v^i \boldsymbol{e}_i$.

Bilineární zobrazení $\iota : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ pak máme pro libovolnou dvojici $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ popsané následovně

$$\iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} v^i w^j \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j.$$

Množina $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j; 1 \le i \le 3, 1 \le j \le 3\}$ tvoří bázi tenzorového součinu $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$. To znamená, že vektorový prostor $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ má dimenzi $\dim \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 = \dim \mathbb{R}^3 \cdot \dim \mathbb{R}^3 = 3 \cdot 3 = 9$.

---

[5] Všimněme si, že autoři zde uvažují vektorový prostor $\overline{\mathcal{W}}$ všech bilineárních funkcionálů na direktní součtu $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ prostorů $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$. Implicitně tím dodefinovávají strukturu vektorového prostoru na kartézském součinu $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ o operace sčítání uspořádaných dvojic a násobení uspořádané dvojice skalárem podle předpisů

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1) + (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2), \qquad \lambda(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\lambda \boldsymbol{u}, \lambda \boldsymbol{v}),$$

kde $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathcal{U}$, $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathcal{V}$, $\lambda \in \mathcal{T}$.

Lineární zobrazení F je určeno jednoznačně, jsou-li dány obrazy všech bázových vektorů (v našem případě se jedná o obrazy devíti prvků báze $\mathscr{B}$).

Definujme $F(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j$ pro $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \in \mathscr{B}$. Potom platí

$$\begin{aligned}
&F(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{o}, && F(\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1) = -\boldsymbol{e}_3, && F(\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_2,\\
&F(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_3, && F(\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{o}, && F(\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{e}_1,\\
&F(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3) = -\boldsymbol{e}_2, && F(\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1, && F(\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{o}.
\end{aligned}$$

Tímto je lineární zobrazení F jednoznačně určeno. Vektorový součin na $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ byl linearizován jako zobrazení F na $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$.

Položme $\boldsymbol{v} = (1,2,1)^T$, $\boldsymbol{w} = (0,1,2)^T$. Vektor $\boldsymbol{v}$ lze přepsat v podobě lineární kombinace bázových vektorů $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ jako $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$. Podobně lze napsat i vektor $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$. Dvojici $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ zobrazíme pomocí zobrazení ι na bilineární formu $\iota(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} = \boldsymbol{T}$ a dále díky bilinearitě platí

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T} = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} &= (\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) \otimes (\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3) = \\
&= \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3.
\end{aligned}$$

Danou bilineární formu lze zapsat maticí typu 3×3 ve tvaru

$$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nyní zapůsobíme na bilineární formu $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$ lineárním zobrazením F. Tím dostáváme

$$F(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{e}_3 - 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{o} + 4\boldsymbol{e}_1 + (-\boldsymbol{e}_1) + 2\boldsymbol{o} = 3\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}.$$

O správnosti výsledku se snadno přesvědčíme přímým výpočtem vektorového součinu $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$.

Na závěr poznamenejme, že předložený příklad neměl za cíl ukázat jiný způsob výpočtu vektorového součinu dvou vektorů, nýbrž pomocí dvojice $(\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3, \iota)$ toto zobrazení linearizovat.

3. Tenzorový součin konečného systému vektorových prostorů

3.1. Linearizace multilineárního zobrazení. Přímým rozšířením věty o linearizaci bilineárního zobrazení dostáváme větu o linearizaci multilineárního zobrazení.

Připomeňme, že multilineární zobrazení je takové zobrazení, které je lineární v každé své složce.

Věta 8 (O linearizaci multilineárního zobrazení). *Nechť $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_n, \mathcal{U}$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$. Potom zde existují vektorový prostor $\mathcal{U}_0$ nad tělesem $\mathbb{K}$ a multilineární zobrazení $\iota \in \mathscr{L}(\mathcal{V}_1 \times \ldots \times \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_0)$, které splňují následující vlastnosti (podmínky)* (T1) *a* (T2).

(T1) *$\mathcal{U}_0$ je generován obrazem množiny $\mathcal{V}_1 \times \ldots \times \mathcal{V}_n$ v zobrazení ι, neboli platí $\mathcal{U}_0 = \langle \operatorname{Im} \iota \rangle$.*

(T2) *Pro libovolné multilineární zobrazení $\phi \in \mathscr{L}(\mathcal{V}_1 \times \ldots \times \mathcal{V}_n, \mathcal{U})$ existuje lineární zobrazení $F : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}$, pro které platí $\phi = F \circ \iota$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}_1 \times \ldots \times \mathcal{V}_n \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathcal{U} \\ \mathcal{U}_0 \arrow[ur, dotted, "F"'] & \end{tikzcd} \tag{3.26}$$

Dvojice $(\mathcal{U}_0, \iota)$ je dána jednoznačně v následujícím významu. Jestliže dvojice $(\mathcal{U}_0, \iota)$ a $(\mathcal{U}_0', \iota')$, obsahující vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$ a multilineární zobrazení, splňují podmínky (T1) *a* (T2)*, tak existuje jednoznačně izomorfismus $F_0 : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_0'$ takový, že platí $F_0 \circ \iota = \iota'$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}_1 \times \ldots \times \mathcal{V}_n \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\iota'"'] & \mathcal{U}_0 \arrow[d, dotted, "F_0"] \\ & \mathcal{U}_0' \end{tikzcd} \tag{3.27}$$

Důkaz předložené věty již provádět nebudeme, neboť jeho idea je shodná s ideou důkazu věty o linearizaci bilineárního zobrazení. Důkaz je pouze technicky náročnější. Konstrukce tenzorového součinu (důkaz existence prostoru $\mathcal{U}_0$) je pro konečný systém vektorových prostorů $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$ přehledně zpracována v publikaci [**46**, s. 2-4].

Budeme-li předpokládat, že vektorové prostory $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$ jsou konečné dimenze, můžeme zobecněním důkazu existence tenzorového součinu v části 1.4 okamžitě interpretovat vektorový prostor $\mathcal{U}_0$ jako vektorový prostor všech multilineárních forem na $\mathcal{V}_1^* \times \ldots \times \mathcal{V}_n^*$. Potom píšeme

$$\mathcal{U}_0 = \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_n = \mathscr{L}(\mathcal{V}_1^* \times \mathcal{V}_2^* \times \ldots \times \mathcal{V}_n^*, \mathbb{K}),$$

a dvojici $(\mathcal{U}_0, \iota)$ nazýváme *tenzorovým součinem vektorových prostorů* $\mathcal{V}_1 \ldots, \mathcal{V}_n$. Podobně pro obraz n-tice vektorů $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \in \mathcal{V}_1 \times \ldots \times \mathcal{V}_n$ v zobrazení ι zavedeme označení

$$\iota(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{v}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_n,$$

a symbol $\boldsymbol{v}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_n$ často čteme jako tenzorový součin vektorů $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$.

Zobrazení ι je multilineární, a proto platí

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_{i-1} \otimes (\mu_1 \boldsymbol{v}_i + \mu_2 \boldsymbol{w}_i) \otimes \boldsymbol{v}_{i+1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_n = \\ &\qquad = \mu_1 \boldsymbol{v}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_{i-1} \otimes \boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{v}_{i+1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_n + \\ &\qquad\qquad + \mu_2 \boldsymbol{v}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_{i-1} \otimes \boldsymbol{w}_i \otimes \boldsymbol{v}_{i+1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_n. \end{aligned}$$

Velice přirozeným způsobem můžeme rovněž formulovat větu o bázi tenzorového součinu $\mathcal{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_n$ vektorových prostorů $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$ konečné dimenze nad tělesem $\mathbb{K}$.

> **Věta 9** (Báze tenzorového součinu $\mathcal{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_n$)**.** *Nechť $\mathcal{M}_i = \{\boldsymbol{v}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{ik_i}\}$ je báze vektorového prostoru $\mathcal{V}_i$ nad tělesem $\mathbb{K}$. Potom množina*
>
> $$\mathscr{B} = \{\boldsymbol{v}_{1j_1} \otimes \boldsymbol{v}_{2j_2} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_{nj_n};\ 1 \leq j_1 \leq k_1,\ 1 \leq j_2 \leq k_2, \ldots, 1 \leq j_n \leq k_n\}$$
>
> *tvoří bázi tenzorového součinu $\mathcal{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_n$. Dále platí*
>
> $$\dim \mathcal{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_n = \dim \mathcal{V}_1 \cdot \ldots \cdot \dim \mathcal{V}_n.$$

Libovolný prvek $\boldsymbol{T} \in \mathcal{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_n$ lze podle věty 9 napsat ve tvaru

$$\boldsymbol{T} = \sum_{j_1,\ldots,j_n} T^{j_1\ldots j_n} \boldsymbol{v}_{1j_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_{nj_n},$$

kde koeficienty $T^{j_1\ldots j_n}$ nazýváme souřadnicemi funkcionálu $\boldsymbol{T}$ vzhledem k bázi $\mathscr{B}$.

Z části 2.1.2 víme, jak se v případě tenzorového součinu dvou vektorových prostorů jejich tenzorový součin změní, zaměníme-li alespoň jeden z vektorových prostorů za prostor k němu duální.

Předpokládejme, že na místě s-tého členu v tenzorovém součinu $\mathcal{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_n$ bude vektorový prostor $\mathcal{V}_s$ nahrazen svým duálem $\mathcal{V}_s^*$. Potom platí

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_s \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_n &= \mathscr{L}(\mathcal{V}_1^* \times \ldots \times \mathcal{V}_s^* \times \ldots \times \mathcal{V}_n^*, \mathbb{K}), \\ \mathcal{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_s^* \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_n &\simeq \mathscr{L}(\mathcal{V}_1^* \times \ldots \times \mathcal{V}_s \times \ldots \times \mathcal{V}_n^*, \mathbb{K}). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Nechť $\mathcal{M}_i = \{\boldsymbol{v}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{ik_i}\}$ je báze vektorového prostoru $\mathcal{V}_i$ a $\mathcal{M}_s^* = \{f^{s1}, \ldots, f^{sk_s}\}$ je duální báze k bázi $\mathcal{M}_s$ vektorového prostoru $\mathcal{V}_s$. Prostor $\mathcal{V}_s^*$ se v tenzorovém součinu $\mathcal{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_n$ nachází na s-tém místě. Libovolný funkcionál $\boldsymbol{T} \in \mathcal{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_n$ lze potom napsat ve tvaru

$$\boldsymbol{T} = \sum_{j_1,\ldots,j_{s-1},i,j_{s+1},\ldots,j_n} T_i^{j_1\ldots j_{s-1}j_{s+1}\ldots j_n} \boldsymbol{v}_{1j_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_{s-1,j_{s-1}} \otimes f^{si} \otimes \boldsymbol{v}_{s+1,j_{s+1}} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_{nj_n}.$$

Polohou indexů u souřadnic funkcionálů rozlišujeme, jak se prvky báze $\mathscr{B}$ tenzorového součinu $\mathcal{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_n$ budou v budoucnu transformovat. Zda jako lineární formy (indexy píšeme dolů), nebo jako vektory (indexy nahoře). Proto je poloha indexů pro praktické počítání velice důležitá.

Díky větě 8 můžeme namísto multilineárních zobrazení na $\mathcal{V}_1 \times \ldots \times \mathcal{V}_n$ studovat lineární zobrazení na $\mathcal{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_n$, neboť platí

$$\mathscr{L}(\mathcal{V}_1 \times \ldots \times \mathcal{V}_n, \mathcal{U}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{V}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_n, \mathcal{U}). \tag{3.29}$$

Izomorfismus (3.29) je zevšeobecněním věty 6 na straně 44.

Vlastnosti tenzorového součinu dvou vektorových prostorů, které jsme formulovali ve větě 7 na straně 45, se přirozeně zobecňují na tenzorové součiny konečně mnoha vektorových prostorů. O této skutečnosti nyní pojednejme v následující větě.

Věta 10 (O izomorfismu 2). *Nechť $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_n$ jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{K}$, nechť π je permutace na množině $\{1, \ldots, n\}$. Potom platí*

(1) $\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_n \simeq \mathcal{V}_{\pi(1)} \otimes \mathcal{V}_{\pi(2)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_{\pi(n)}$,

(2) $\mathcal{V}_1 \otimes (\mathcal{V}_2 \otimes \mathcal{V}_3) \simeq \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2 \otimes \mathcal{V}_3$.

Jsou-li vektorové prostory $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_n$ konečné dimenze a $\mathcal{V}_1^*, \mathcal{V}_2^*, \ldots, \mathcal{V}_n^*$ jsou prostory k nim duální, potom

(3) $(\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_n)^* \simeq \mathcal{V}_1^* \otimes \mathcal{V}_2^* \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_n^*$.

Důkaz. První tvrzení bychom dokázali úplně stejným způsobem, jakým to bylo provedeno ve větě 7 pro tenzorový součin dvou vektorových prostorů $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$. Izomorfismus vyplyne z věty 8 o linearizaci multilineárního zobrazení.

Druhé tvrzení bývá označováno jako *asociativita tenzorového součinu* a jeho důkaz je podrobně zpracován v publikaci [**20**, s. 12-13].

Důkaz třetího tvrzení se opírá o izomorfismus (3.29) a izomorfismus $\mathcal{V} \simeq \mathcal{V}^{**}$, neboť

$$(\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_n)^* = \operatorname{Hom}(\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_n, \mathbb{K}) \simeq$$
$$\simeq \mathscr{L}(\mathcal{V}_1 \times \ldots \times \mathcal{V}_n, \mathbb{K}) \simeq \mathcal{V}_1^* \otimes \mathcal{V}_2^* \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}_n^*.$$

Poslední izomorfismus vyplyne zobecněním izomorfismu (3.28) na straně 50. □

Příklad 6. Zobrazení $\boldsymbol{T}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2)^* \to \mathbb{R}$ je dáno předpisem

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, f) = f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v},$$

kde $\boldsymbol{a} = (1, 2)^T \in \mathbb{R}^3$. Dokažme, že se jedná o *trilineární* zobrazení a zapišme daný funkcionál jako prvek příslušného tenzorového součinu $(\mathbb{R}^2)^* \otimes (\mathbb{R}^2)^* \otimes \mathbb{R}^2$.

Dokázat, že daný funkcionál je trilineární, znamená ověřit linearitu v každé jeho složce. Nechť $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$, $f^1, f^2, f \in (\mathbb{R}^2)^*$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$, potom pro zobrazení $\boldsymbol{T}$ dostáváme

$$\boldsymbol{T}(\mu_1 \boldsymbol{u}_1 + \mu_2 \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}, f) = f(\boldsymbol{a})(\mu_1 \boldsymbol{u}_1 + \mu_2 \boldsymbol{u}_2)^T \boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{a})(\mu_1 \boldsymbol{u}_1^T + \mu_2 \boldsymbol{u}_2^T)\boldsymbol{v} =$$
$$= \mu_1 f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}_1^T \boldsymbol{v} + \mu_2 f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}_2^T \boldsymbol{v} = \mu_1 \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}, f) + \mu_2 \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}, f),$$

čímž dokazujeme linearitu v první složce. Linearita ve druhé složce se dokáže podobným způsobem následovně

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2, f) = f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}^T(\mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{a})(\mu_1 \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v}_2) =$$
$$= \mu_1 f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v}_2 = \mu_1 \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1, f) + \mu_2 \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1, f).$$

Nakonec dokážeme linearitu ve složce třetí

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\mu_1 f^1+\mu_2 f^2) &= (\mu_1 f_1+\mu_2 f_2)(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = \mu_1 f^1(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v}+\mu_2 f^2(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = \\ &= \mu_1\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},f^1)+\mu_2\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},f^2).\end{aligned}$$

Zjistili jsme, že zobrazení $\boldsymbol{T}$ je lineární v každé své složce. Forma $\boldsymbol{T}$ je tudíž trilineární.

Díky izomorfismu $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\times(\mathbb{R}^2)^*,\mathbb{R})\simeq(\mathbb{R}^2)^*\otimes(\mathbb{R}^2)^*\otimes\mathbb{R}^2$ můžeme libovolné zobrazení z prostoru $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\times(\mathbb{R}^2)^*,\mathbb{R})$ jednoznačně ztotožnit s prvkem z prostoru $(\mathbb{R}^2)^*\otimes(\mathbb{R}^2)^*\otimes\mathbb{R}^2$.

Nechť $\mathcal{K}=\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ je standardní báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{K}^*=\{f^1,f^2\}$ je báze duálního vektorového prostoru $(\mathbb{R}^2)^*$, která je duální k bázi $\mathcal{K}$. Báze $\mathscr{B}$ tenzorového součinu $(\mathbb{R}^2)^*\otimes(\mathbb{R}^2)^*\otimes\mathbb{R}^2$ je potom množina

$$\mathscr{B}=\{f^i\otimes f^j\otimes\boldsymbol{e}_k; i,j,k\in\{1,2\}\}.$$

Přistupme k výpočtu souřadnic funkcionálu $\boldsymbol{T}$ vzhledem k bázi $\mathscr{B}$ tenzorového součinu $(\mathbb{R}^2)^*\otimes(\mathbb{R}^2)^*\otimes\mathbb{R}^2$.

Souřadnice trilineární formy $\boldsymbol{T}$ vzhledem k bázi $\mathscr{B}$ obdržíme jejím vyčíslením na vhodné kombinaci vektorů a kovektorů z bází $\mathcal{K}$ a $\mathcal{K}^*$. Platí totiž

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_a,\boldsymbol{e}_b,f^c) &= \left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}T^k_{ij}f^i\otimes f^j\otimes\boldsymbol{e}_k\right)(\boldsymbol{e}_a,\boldsymbol{e}_b,f^c) = \\ &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}T^k_{ij}f^i(\boldsymbol{e}_a)f^j(\boldsymbol{e}_b)f^c(\boldsymbol{e}_k) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}T^k_{ij}\delta^i_a\delta^j_b\delta^c_k = T^c_{ab},\end{aligned}\tag{3.30}$$

kde $a,b,c\in\{1,2\}$. Nyní určíme souřadnice trilineární formy $\boldsymbol{T}$ dosazením za $\boldsymbol{e}_a$, $\boldsymbol{e}_b$, f^c do vztahu (3.30). Postupně obdržíme

$$\begin{aligned}
T^1_{11} &= \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1,f^1)=f^1(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e}_1^T\boldsymbol{e}_1=1, & T^2_{11} &= \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1,f^2)=f^2(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e}_1^T\boldsymbol{e}_1=2,\\
T^1_{12} &= \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,f^1)=f^1(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e}_1^T\boldsymbol{e}_2=0, & T^2_{12} &= \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,f^2)=f^2(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e}_1^T\boldsymbol{e}_2=0,\\
T^1_{21} &= \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1,f^1)=f^1(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e}_2^T\boldsymbol{e}_1=0, & T^2_{21} &= \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1,f^2)=f^2(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e}_2^T\boldsymbol{e}_1=0,\\
T^1_{22} &= \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2,f^1)=f^1(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e}_2^T\boldsymbol{e}_2=1, & T^2_{22} &= \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2,f^2)=f^2(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e}_2^T\boldsymbol{e}_2=2.
\end{aligned}$$

Pro formu $\boldsymbol{T}$ platí

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= T^1_{11}f^1\otimes f^1\otimes\boldsymbol{e}_1+T^1_{12}f^1\otimes f^2\otimes\boldsymbol{e}_1+T^1_{21}f^2\otimes f^1\otimes\boldsymbol{e}_1+T^1_{22}f^2\otimes f^2\otimes\boldsymbol{e}_1+\\ &\quad+T^2_{11}f^1\otimes f^1\otimes\boldsymbol{e}_2+T^2_{12}f^1\otimes f^2\otimes\boldsymbol{e}_2+T^2_{21}f^2\otimes f^1\otimes\boldsymbol{e}_2+T^2_{22}f^2\otimes f^2\otimes\boldsymbol{e}_2.\end{aligned}$$

Dosazením konkrétních souřadnic dostáváme

$$\boldsymbol{T}=f^1\otimes f^1\otimes\boldsymbol{e}_1+f^2\otimes f^2\otimes\boldsymbol{e}_1+2f^1\otimes f^1\otimes\boldsymbol{e}_2+2f^2\otimes f^2\otimes\boldsymbol{e}_2,$$

čímž trilineární formu zapisujeme jako prvek tenzorového součinu $(\mathbb{R}^2)^*\otimes(\mathbb{R}^2)^*\otimes\mathbb{R}^2$.

3.2. Tenzory typu (p,q)**.** Až do tohoto okamžiku jsme v celé kapitole předpokládali, že vektorové prostory $\mathcal{V}_1,\dots,\mathcal{V}_n$ jsou obecně různé. Nyní se zaměříme na tenzorové součiny vektorového prostoru $\mathcal{V}$ se sebou samým a se svým duálem $\mathcal{V}^*$. Vektorový prostor $\mathcal{V}$ budeme od této chvíle vždy uvažovat jako prostor konečné dimenze.

Definice 8 (Tenzor typu (p,q))**.** Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem $\mathbb{K}$ a $\mathcal{V}^*$ je prostor k němu duální. Definujeme vektorový prostor $T_p^q(\mathcal{V})$ nad tělesem $\mathbb{K}$ následovně

$$T_p^q(\mathcal{V})=\underbrace{\mathcal{V}^*\otimes\ldots\otimes\mathcal{V}^*}_{p}\otimes\underbrace{\mathcal{V}\otimes\ldots\otimes\mathcal{V}}_{q}.$$

Prvky prostoru $T_p^q(\mathcal{V})$ budeme nazývat *tenzory* typu (p,q). Číslo $p+q$ nazýváme *řád tenzoru.*

Položme $T_0^0(\mathcal{V})=\mathbb{K}$. Potom tenzory typu $(0,0)$ jsou skaláry. Tenzory typu $(0,1)$ jsou vektory, neboť $T_0^1(\mathcal{V})=\mathcal{V}$. Podobně tenzory typu $(1,0)$ jsou lineární formy, protože $T_1^0(\mathcal{V})=\mathcal{V}^*$. Vektory a lineární formy souhrnně označujeme jako tenzory prvního řádu. Tenzory druhého řádu jsou tenzory typu $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, které jsou po řadě prvky vektorových prostorů $T_2^0(\mathcal{V})=\mathcal{V}^*\otimes\mathcal{V}^*$, $T_1^1(\mathcal{V})=\mathcal{V}^*\otimes\mathcal{V}$, $T_0^2(\mathcal{V})=\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}$.

3.2.1. *Báze vektorového prostoru* $T_p^q(\mathcal{V})$. Označme $\mathcal{M}=\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ bázi vektorového prostoru $\mathcal{V}$ a $\mathcal{M}^*=\{f^1,\dots,f^n\}$ bázi duálního prostoru $\mathcal{V}^*$, která je duální k bázi $\mathcal{M}$. Potom platí $\dim T_p^q(\mathcal{V})=n^{p+q}$ a množina

$$\mathscr{B}=\{f^{i_1}\otimes\ldots\otimes f^{i_p}\otimes\boldsymbol{v}_{i_{p+1}}\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{v}_{i_{p+q}};i_1,\dots,i_{p+q}\in\{1,\dots,n\}\}$$

tvoří bázi vektorového prostoru $T_p^q(\mathcal{V})$. Každý tenzor $\boldsymbol{T}\in T_p^q(\mathcal{V})$ můžeme proto zapsat ve tvaru lineární kombinace bázových tenzorů následovně

$$\boldsymbol{T}=\sum_{\substack{j_1,\dots,j_q\\ i_1,\dots,i_p}}T_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}f^{i_1}\otimes\ldots\otimes f^{i_p}\otimes\boldsymbol{v}_{j_1}\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{v}_{j_q},\tag{3.31}$$

kde $i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q\in\{1,\dots,n\}$. Koeficienty lineární kombinace $T_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}$ nazýváme *souřadnicemi* tenzoru $\boldsymbol{T}$ vzhledem k bázi $\mathscr{B}$. Počet dolních indexů je p, počet horních indexů je q.

3.2.2. *Součet tenzorů a násobení tenzoru skalárem.* Jestliže tenzor $\boldsymbol{T}\in T_p^q(\mathcal{V})$ má vzhledem k bázi $\mathscr{B}$ souřadnice $T_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}$ a tenzor $\boldsymbol{S}\in T_p^q(\mathcal{V})$ má vzhledem k téže bázi souřadnice $S_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}$, pak jejich součtem rozumíme tenzor $\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T}\in T_p^q(\mathcal{V})$, pro který platí

$$\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T}=\sum_{\substack{j_1,\dots,j_q\\ i_1,\dots,i_p}}\left(T_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}+S_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}\right)f^{i_1}\otimes\ldots\otimes f^{i_p}\otimes\boldsymbol{v}_{j_1}\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{v}_{j_q}.\tag{3.32}$$

Podobně, jestliže tenzor $\boldsymbol{T}\in T_p^q(\mathcal{V})$ má vzhledem k bázi $\mathscr{B}$ souřadnice $T_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}$ a λ je libovolný prvek z tělesa $\mathbb{K}$, pak skalárním násobkem tenzoru $\boldsymbol{T}$ rozumíme tenzor $\lambda\boldsymbol{T}\in T_p^q(\mathcal{V})$, pro který platí

$$\lambda \boldsymbol{T} = \sum_{\substack{j_1,\dots,j_q \\ i_1,\dots,i_p}} \lambda T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} f^{i_1} \otimes \dots \otimes f^{i_p} \otimes \boldsymbol{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{v}_{j_q}. \tag{3.33}$$

Tím jsme ukázali, jakým přirozeným způsobem jsou na vektorovém prostoru $T^q_p(\mathcal{V})$ zavedeny operace sčítání tenzorů a násobení tenzoru skalárem.

Nakonec poznamenejme, že dva tenzory $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T} \in T^q_p(\mathcal{V})$ se rovnají právě tehdy, když se rovnají ve všech souřadnicích vzhledem k jedné bázi $\mathscr{B}$.

Příklad 7. Nechť $\mathcal{K} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ je standardní báze aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{K}^* = \{f^1, f^2\}$ je standardní báze prostoru $(\mathbb{R}^2)^*$, která je k bázi $\mathcal{K}$ duální. Dále nechť $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{S}$ jsou tenzory typu $(1, 2)$, přičemž

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= f^1 \otimes \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + 3f^1 \otimes \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 - 6f^2 \otimes \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1, \\ \boldsymbol{S} &= 2f^1 \otimes \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 - 5f^2 \otimes \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + 3f^2 \otimes \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2. \end{aligned}$$

Určeme tenzor $\boldsymbol{R}$, pro který platí $\boldsymbol{R} = 2\boldsymbol{T} - 3\boldsymbol{S}$.

Použitím vztahů (3.33) a (3.32) dostáváme

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{T} &= 2f^1 \otimes \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + 6f^1 \otimes \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 - 12f^2 \otimes \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1, \\ -3\boldsymbol{S} &= -6f^1 \otimes \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 + 15f^2 \otimes \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 - 9f^2 \otimes \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2, \end{aligned}$$

a konečně

$$\boldsymbol{R} = 2\boldsymbol{T} - 3\boldsymbol{S} = 2f^1 \otimes \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + 3f^2 \otimes \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 - 9f^2 \otimes \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2.$$

3.2.3. *Tenzor typu (p, q) jako multilineární forma.* Každý tenzor typu $(p, q) \neq (0, 0)$ lze ztotožnit s multilineární formou, neboť

$$\begin{aligned} T^q_p(\mathcal{V}) = \underbrace{\mathcal{V}^* \otimes \dots \otimes \mathcal{V}^*}_{p} \otimes \underbrace{\mathcal{V} \otimes \dots \otimes \mathcal{V}}_{q} &= \mathscr{L}((\mathcal{V}^*)^* \times \dots \times (\mathcal{V}^*)^* \times \mathcal{V}^* \times \dots \times \mathcal{V}^*, \mathbb{K}) \simeq \\ &\simeq \mathscr{L}(\underbrace{\mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}}_{p} \times \underbrace{\mathcal{V}^* \times \dots \times \mathcal{V}^*}_{q}, \mathbb{K}). \end{aligned}$$

Všimněme si, že jako speciální případ dostáváme $\mathcal{V}^* \simeq \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathbb{K})$, kde symbol $\simeq$ lze zaměnit za $=$, neboť duální prostor $\mathcal{V}^*$ je tímto způsobem definován. Podobně $\mathcal{V} \simeq \mathscr{L}(\mathcal{V}^*, \mathbb{K}) = \mathcal{V}^{**}$.

Odtud dostáváme přímou spojitost s často se vyskytující definicí tenzoru jako multilineární formy.

Definice 9 (Tenzor jako multilineární forma)**.** Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem $\mathbb{K}$ a nechť $\mathcal{V}^*$ je vektorový prostor k němu duální. Tenzorem typu (p, q) nazýváme multilineární zobrazení

$$\boldsymbol{T} : \underbrace{\mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}}_{p} \times \underbrace{\mathcal{V}^* \times \dots \times \mathcal{V}^*}_{q} \to \mathbb{K}.$$

V tomto okamžiku jsme ukázali, jaká je souvislost definice tenzoru typu (p,q) jako prvku tenzorového součinu p kopií vektorového prostoru $\mathcal{V}^*$ a q kopií vektorového prostoru $\mathcal{V}$ (definice 8), s definicí tenzoru jako multilineární formy (definice 9).

Příklad 8. Determinant čtvercové matice řádu n bývá často definován jako zobrazení $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, které matici $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ z prostoru všech čtvercových matic řádu n nad tělesem $\mathbb{K}$ ($M_n(\mathbb{K})$) přiřadí prvek z tělesa $\mathbb{K}$. Determinant takové matice $\boldsymbol{A}$ pak definujeme předpisem

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}, \tag{3.34}$$

ve kterém sčítáme přes všechny permutace π množiny $\{1,\dots,n\}$, které jsou prvky symetrické grupy $\mathcal{S}_n$. Funkce $\operatorname{sgn} : \mathcal{S}_n \to \{1,-1\}$ přiřadí permutaci prvek 1, resp. -1, jedná-li se o permutaci sudou, resp. lichou. Potom $\operatorname{sgn}(\pi)$ označujeme jako *znaménko permutace* π.

Více o determinantu jako zobrazení na maticích nalezne čtenář například v publikaci [**23**, s. 164–196].

Jelikož sloupce čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ řádu n nad tělesem $\mathbb{K}$, jsou sloupcové vektory aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{K}^n$, je možné determinant chápat jako zobrazení, které uspořádané n-tici vektorů z prostoru $\mathbb{K}^n$ přiřazuje prvek z tělesa $\mathbb{K}$. Neboli

$$\det : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},$$

kde vektorový prostor $\mathbb{K}^n$ se v kartézském součinu vyskytuje právě n-krát.

Důležitou vlastností determinantu je jeho linearita v i-té složce, kterou můžeme pro $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{w} \in \mathbb{K}^n$, $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ napsat ve tvaru

$$\begin{aligned}&\det(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{i-1},\alpha\boldsymbol{v}_i+\beta\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}_{i+1},\dots,\boldsymbol{v}_n) = \\ &\qquad = \alpha\det(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{i-1},\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_{i+1},\dots,\boldsymbol{v}_n) + \beta\det(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{i-1},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}_{i+1},\dots,\boldsymbol{v}_n).\end{aligned}$$

Determinant je tudíž multilineární zobrazení (přesněji n-lineární zobrazení). Podle definice 9 je pak tenzorem typu $(n,0)$. Nejenže $\det \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n, \mathbb{K})$, ale díky izomorfismu $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \simeq (\mathbb{K}^n)^* \otimes \dots \otimes (\mathbb{K}^n)^*$ můžeme determinant ztotožnit s prvkem tenzorového součinu $(\mathbb{K}^n)^* \otimes \dots \otimes (\mathbb{K}^n)^*$. Pokusme se nyní najít odpovídající prvek.

Začněme se zavedením tzv. *Levi–Civitova symbolu*, který můžeme v literatuře rovněž nalézt pod označením *Levi–Civitův pseudotenzor* [**47**, s. 66]. Protože v rámci bakalářské práce se nebudeme zabývat definicí pojmu *pseudotenzor*, přidržíme se prvního z uvedených označení. Pomocí Levi–Civitova symbolu budeme moci jednoduše nahradit funkci sgn v definičním vztahu (3.34), která permutaci $\pi \in \mathcal{S}_n$ přiřazuje její znaménko.

Označme $\mathcal{M} = \{1, \ldots, n\}$, $i_1, \ldots, i_n \in \mathcal{M}$, potom definujeme

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže uspořádání } (i_1, i_2, \ldots, i_n) \text{ je sudá permutace } \mathcal{M}, \\ -1, & \text{jestliže uspořádání } (i_1, i_2, \ldots, i_n) \text{ je lichá permutace } \mathcal{M}, \\ 0, & \text{jestliže } \exists\, k, l \in \{1, \ldots, n\} : k \neq l \Rightarrow i_k = i_l. \end{cases} \tag{3.35}$$

Díky nově zavedenému Levi–Civitově symbolu $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$ můžeme determinant zapsat jako zobrazení, pro které platí

$$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \mapsto \sum_{i_1, \ldots, i_n} \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} v^{i_1} \ldots v^{i_n},$$

kde v^{i_j} je i-tá souřadnice vektoru $\boldsymbol{v}_j$ vzhledem ke standardní bázi prostoru $\mathbb{K}^n$.

Bází duálního vektorového prostoru $(\mathbb{K}^n)^*$ k prostoru $\mathbb{K}^n$ je množina lineárních forem $\{f^1, \ldots, f^n\}$. Jestliže vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ má vzhledem ke standardní bázi $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ prostoru $\mathbb{K}^n$ souřadnice $(v^1, \ldots, v^n)^T$, přičemž platí $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n v^i \boldsymbol{e}_i$, pak $f^j(\boldsymbol{v}) = v^j$, kde $j \in \{1, \ldots, n\}$. Potom je hledaným prvkem v tenzorovém součinu $(\mathbb{K}^n)^* \otimes \ldots \otimes (\mathbb{K}^n)^*$ tenzor

$$\sum_{i_1, \ldots, i_n} \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} f^{i_1} \otimes \ldots \otimes f^{i_n},$$

neboť platí

$$\left(\sum_{i_1, \ldots, i_n} \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} f^{i_1} \otimes \ldots \otimes f^{i_n} \right) (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) =$$
$$= \sum_{i_1, \ldots, i_n} \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} f^{i_1}(\boldsymbol{v}_1) \ldots f^{i_n}(\boldsymbol{v}_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} v^{i_1} \ldots v^{i_n} = \det(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n).$$

V rámci tohoto příkladu se nám podařilo ztotožnit determinant s konkrétním tenzorem typu $(n, 0)$ v tenzorovém součinu $(\mathbb{K}^n)^* \otimes \ldots \otimes (\mathbb{K}^n)^*$. Množina

$$\mathscr{B} = \{f^{i_1} \otimes f^{i_2} \otimes \ldots \otimes f^{i_n}; i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathcal{M}\}$$

tvoří podle části 3.2.1 bázi tenzorového součinu $(\mathbb{K}^n)^* \otimes \ldots \otimes (\mathbb{K}^n)^*$. Tenzor odpovídající determinantu je pak určen svými souřadnicemi vzhledem k této bázi. Všimněme si, že souřadnice tohoto tenzoru jsou rovny Levi–Civitově symbolu $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$.

4. Operace s tenzory

V části 3.2.2 jsme popsali základní operace s tenzory typu (p, q), které vycházely z lineární struktury prostoru $T_p^q(\mathcal{V})$. Jednalo se o operace *sčítání tenzorů* a *násobení tenzoru skalárem.* Nyní se zaměříme na operace, které nám umožňují vytvářet z jednoduchých tenzorů tenzory složitější, nebo naopak ze složitých tenzorů vytvářet tenzory jednodušší.

4.1. Součin tenzorů. Nechť $\boldsymbol{T} \in T^{q_1}_{p_1}(\mathcal{V})$ je tenzor typu (p_1, q_1), pro který platí

$$\boldsymbol{T} = \sum_{\substack{j_1,\dots,j_q\\ i_1,\dots,i_p}} T^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p} f^{i_1} \otimes \dots \otimes f^{i_p} \otimes \boldsymbol{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{v}_{j_q}.$$

Dále nechť $\boldsymbol{S} \in T^{q_2}_{p_2}(\mathcal{V})$ je tenzor typu (p_2, q_2), pro který platí

$$\boldsymbol{S} = \sum_{\substack{l_1,\dots,l_{q_2}\\ k_1,\dots,k_{p_2}}} S^{l_1\dots l_{q_2}}_{k_1\dots k_{p_2}} f^{k_1} \otimes \dots \otimes f^{k_{p_2}} \otimes \boldsymbol{v}_{l_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{v}_{l_{q_2}}.$$

Potom zobrazení $\otimes : T^{q_1}_{p_1}(\mathcal{V}) \times T^{q_2}_{p_2}(\mathcal{V}) \to T^{q_1+q_2}_{p_1+p_2}(\mathcal{V})$, které tenzorům $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{S}$ přiřazuje tenzor $\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S}$ typu $(p_1 + q_1, p_2 + q_2)$ podle předpisu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S} = \sum_{\substack{j_1,\dots,j_{q_1}\\ i_1,\dots,i_{p_1}}} \sum_{\substack{l_1,\dots,l_{q_2}\\ k_1,\dots,k_{p_2}}} T^{j_1\dots i_{q_1}}_{i_1\dots i_{p_1}} S^{l_1\dots l_{q_2}}_{k_1\dots k_{p_2}} f^{i_1} \otimes \dots \otimes f^{i_{p_1}} \otimes f^{k_1} \otimes \dots\\ \dots \otimes f^{k_{p_2}} \otimes \boldsymbol{v}_{j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{v}_{j_{q_1}} \otimes \boldsymbol{v}_{l_1} \dots \otimes \boldsymbol{v}_{l_{q_2}},\end{aligned} \tag{3.36}$$

nazýváme *tenzorovým součinem* tenzorů $\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{S}$.

Součin dvou tenzorů si nyní demonstrujme na konkrétním příkladu.

Příklad 9. Uvažujme tenzory $\boldsymbol{T} \in T^1_2(\mathbb{R}^2)$ a $\boldsymbol{S} \in T^1_1(\mathbb{R}^2)$, pro které platí

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= 3f^1 \otimes f^2 \otimes \boldsymbol{e}_1 + 2f^2 \otimes f^1 \otimes \boldsymbol{e}_2,\\ \boldsymbol{S} &= f^1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + 4f^1 \otimes \boldsymbol{e}_2 - 3f^2 \otimes \boldsymbol{e}_2.\end{aligned}$$

Využitím vztahu (3.36) určíme postupně tenzorové součiny $\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{S} \otimes \boldsymbol{T}$. Nově vzniklé tenzory budou oba typu $(3, 2)$, tedy tenzory pátého řádu. Pro jednotlivé tenzorové součiny platí

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S} = {}& 3f^1 \otimes f^2 \otimes f^1 \otimes \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + 12f^1 \otimes f^2 \otimes f^1 \otimes \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2\\ &- 9f^1 \otimes f^2 \otimes f^2 \otimes \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + 2f^2 \otimes f^1 \otimes f^1 \otimes \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1\\ &+ 8f^2 \otimes f^1 \otimes f^1 \otimes \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 - 6f^2 \otimes f^1 \otimes f^2 \otimes \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2,\\ \boldsymbol{S} \otimes \boldsymbol{T} = {}& 3f^1 \otimes f^1 \otimes f^2 \otimes \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + 2f^1 \otimes f^2 \otimes f^1 \otimes \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2\\ &+ 12f^1 \otimes f^1 \otimes f^2 \otimes \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 + 8f^1 \otimes f^2 \otimes f^1 \otimes \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2\\ &- 9f^2 \otimes f^1 \otimes f^2 \otimes \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 - 6f^2 \otimes f^2 \otimes f^1 \otimes \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2.\end{aligned}$$

Z uvedeného příkladu je zřejmé, že tenzorový součin dvou tenzorů není komutativní.

4.2. Kontrakce tenzoru. Na úplný závěr se zastavme nad způsobem, jakým ze složitějších tenzorů vytvářet tenzory jednodušší.

Uvažujme vektorový prostor $T^q_p(\mathcal{V})$ a předpokládejme, že $p, q \geq 1$. *Kontrakce tenzoru* (*zúžení*) podle i-té a j-té složky je lineární zobrazení $C_{ij} : T^q_p(\mathcal{V}) \to T^{q-1}_{p-1}(\mathcal{V})$, které je definované předpisem

$$C_{ij}(f^1 \otimes \ldots \otimes f^{i-1} \otimes f^i \otimes f^{i+1} \otimes \ldots \otimes f^p \otimes \boldsymbol{v}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_{j-1} \otimes \boldsymbol{v}_j \otimes \boldsymbol{v}_{j+1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_q) =$$
$$= f^i(\boldsymbol{v}_j) f^1 \otimes \ldots \otimes f^{i-1} \otimes f^{i+1} \otimes \ldots \otimes f^p \otimes \boldsymbol{e}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_{j-1} \otimes \boldsymbol{v}_{j+1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_q. \quad (3.37)$$

Výpočet kontrakce tenzoru si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 10. Určeme kontrakci tenzoru $\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S}$ z příkladu 9 podle 3. a 2. složky.

S využitím linearity zobrazení C_{32} lze psát

$$\begin{aligned} C_{32}(\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S}) &= 3C_{32}(f^1 \otimes f^2 \otimes f^1 \otimes \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1) + 12C_{32}(f^1 \otimes f^2 \otimes f^1 \otimes \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2) \\ &\quad - 9C_{32}(f^1 \otimes f^2 \otimes f^2 \otimes \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2) + 2C_{32}(f^2 \otimes f^1 \otimes f^1 \otimes \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1) \\ &\quad + 8C_{32}(f^2 \otimes f^1 \otimes f^1 \otimes \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2) - 6C_{32}(f^2 \otimes f^1 \otimes f^2 \otimes \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2). \end{aligned}$$

Nyní provedeme úžení jednotlivých sčítanců podle vztahu (3.37). Postupně dostáváme

$$\begin{aligned} C_{32}(\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S}) &= 3f^1(\boldsymbol{e}_1) f^1 \otimes f^2 \otimes \boldsymbol{e}_1 + 12 f^1(\boldsymbol{e}_2) f^1 \otimes f^2 \otimes \boldsymbol{e}_1 - 9 f^2(\boldsymbol{e}_2) f^1 \otimes f^2 \otimes \boldsymbol{e}_1 \\ &\quad + 2 f^1(\boldsymbol{e}_1) f^2 \otimes f^1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + 8 f^1(\boldsymbol{e}_2) f^2 \otimes f^1 \otimes \boldsymbol{e}_2 - 6 f^2(\boldsymbol{e}_2) f^2 \otimes f^1 \otimes \boldsymbol{e}_2, \\ &= (3 \cdot 1) f^1 \otimes f^2 \otimes \boldsymbol{e}_1 + (12 \cdot 0) f^1 \otimes f^2 \otimes \boldsymbol{e}_1 - (9 \cdot 1) f^1 \otimes f^2 \otimes \boldsymbol{e}_1 \\ &\quad + (2 \cdot 1) f^2 \otimes f^1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + (8 \cdot 0) f^2 \otimes f^1 \otimes \boldsymbol{e}_2 - (6 \cdot 1) f^2 \otimes f^1 \otimes \boldsymbol{e}_2, \\ &= -6 f^1 \otimes f^2 \otimes \boldsymbol{e}_1 - 4 f^2 \otimes f^1 \otimes \boldsymbol{e}_2. \end{aligned}$$

Celkově jsme kontrakcí tenzoru $\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S}$ obdrželi tenzor $C_{32}(\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S})$ typu $(2,1)$, pro který platí

$$C_{32}(\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S}) = -6 f^1 \otimes f^2 \otimes \boldsymbol{e}_1 - 4 f^2 \otimes f^1 \otimes \boldsymbol{e}_2,$$

a tím je příklad zcela vyřešen.

KAPITOLA 4

Tenzory v souřadnicích

Předešlá kapitola zavedla pojem tenzor typu (p, q) pro prvek tenzorového součinu

$$T_p^q(\mathcal{V}) = \underbrace{\mathcal{V}^* \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}^*}_{p} \otimes \underbrace{\mathcal{V} \otimes \ldots \otimes \mathcal{V}}_{q},$$

kde $\mathcal{V}$ je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem $\mathbb{K}$.

Zvolíme-li ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ bázi $\mathcal{M} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ a v duálním prostoru $\mathcal{V}^*$ bázi $\mathcal{M}^* = \{f^1, \ldots, f^n\}$, která je duální k bázi $\mathcal{M}$, tvoří množina

$$\mathscr{B} = \{f^{i_1} \otimes \ldots \otimes f^{i_p} \otimes \boldsymbol{v}_{i_{p+1}} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_{i_{p+q}}; i_1, \ldots, i_{p+q} \in \{1, \ldots, n\}\}$$

bázi prostoru $T_p^q(\mathcal{V})$. Dále jsme zjistili, že každý tenzor $\boldsymbol{T} \in T_p^q(\mathcal{V})$ můžeme zapsat ve tvaru lineární kombinace bázových tenzorů jako

$$\boldsymbol{T} = \sum_{\substack{j_1, \ldots, j_q \\ i_1, \ldots, i_p}} T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} f^{i_1} \otimes \ldots \otimes f^{i_p} \otimes \boldsymbol{v}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_{j_q},$$

kde $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \in \{1, \ldots, n\}$. Koeficienty lineární kombinace $T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ jsme nazvali *souřadnicemi* tenzoru $\boldsymbol{T}$ vzhledem k bázi $\mathscr{B}$.

Pokud známe bázi $\mathcal{M}$, existuje k ní podle lemmatu 4 duální báze $\mathcal{M}^*$ a díky tomu pak máme úplnou informaci o bázi $\mathscr{B}$ tenzorového součinu $T_p^q(\mathcal{V})$. Z tohoto důvodu bude výhodnější nazývat koeficienty $T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ jako souřadnice tenzoru $\boldsymbol{T}$ vzhledem k bázi $\mathcal{M}$ přímo.

V této kapitole se zaměříme na odvození tzv. *analytické definice* tenzoru typu (p, q) z definice 8 popsané v kapitole třetí. Nejprve připomeňme některé transformační vlastnosti vektorů a kovektorů.

1. Transformační vlastnosti vektorů a lineárních forem

Předpokládejme, že $\mathcal{M} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ a $\mathcal{N} = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbb{K}$. Vyjádřeme prvky báze $\mathcal{N}$ pomocí prvků báze $\mathcal{M}$ a naopak. Dostáváme

$$\boldsymbol{w}_j = \sum_{i=1}^{n} A_j^i \boldsymbol{v}_i, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{l=1}^{n} \widehat{A}_k^l \boldsymbol{w}_l, \quad k \in \{1, \ldots, n\}, \tag{4.2}$$

kde $A_j^i \in \mathbb{K}$ a $\widehat{A}_k^l \in \mathbb{K}$ pro všechna $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$.

Označme $\boldsymbol{A}$ čtvercovou matici řádu n, která obsahuje v i-tém řádku a j-tém sloupci prvek A^i_j. Analogicky označme $\widehat{\boldsymbol{A}}$ čtvercovou matici řádu n, ve které se prvek $\widehat{A}^l_k$ nachází v l-tém řádku a k-tém sloupci. Matice $\boldsymbol{A}$, resp. $\widehat{\boldsymbol{A}}$ se nazývá *matice přechodu* od báze $\mathcal{M}$ k bázi $\mathcal{N}$, resp. matice přechodu od báze $\mathcal{N}$ k bázi $\mathcal{M}$.

Povšimněme si, že námi zavedená matice přechodu od báze $\mathcal{M}$ k bázi $\mathcal{N}$ není maticí soustavy lineárních rovnic (4.1). Vůči této matici je transponovaná. Tento dovětek zdůrazňujeme z toho důvodu, že v literatuře (např. [**39**, s. 235]) může být matice přechodu od báze $\mathcal{M}$ k bázi $\mathcal{N}$ zavedena jako matice soustavy (4.1). Stejně tak pro matici přechodu od báze $\mathcal{N}$ k bázi $\mathcal{M}$.

Vyšetřeme nyní vztah matice $\boldsymbol{A}$ k matici $\widehat{\boldsymbol{A}}$. Kombinací rovností (4.1) a (4.2) postupně dostáváme

$$\boldsymbol{w}_j = \sum_{i=1}^{n} A^i_j \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} A^i_j \left(\sum_{l=1}^{n} \widehat{A}^l_i \boldsymbol{w}_l \right) = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} A^i_j \widehat{A}^l_i \right) \boldsymbol{w}_l.$$

Zapišme vektor $\boldsymbol{w}_j$ jako lineární kombinaci vektorů báze $\mathcal{N}$. Platí $\boldsymbol{w}_j = \sum_{l=1}^{n} \delta^l_j \boldsymbol{w}_l$, kde δ^l_j je Kroneckerův symbol. Díky tomuto lze psát

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_j = \sum_{l=1}^{n} \delta^l_j \boldsymbol{w}_l &= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} A^i_j \widehat{A}^l_i \right) \boldsymbol{w}_l, \\ \boldsymbol{o} &= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} A^i_j \widehat{A}^l_i \right) \boldsymbol{w}_l - \sum_{l=1}^{n} \delta^l_j \boldsymbol{w}_l, \\ \boldsymbol{o} &= \sum_{l=1}^{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} A^i_j \widehat{A}^l_i \right) - \delta^l_j \right] \boldsymbol{w}_l. \end{aligned}$$

Protože množina $\mathcal{N}$ je lineárně nezávislá, platí $\sum_{i=1}^{n} A^i_j \widehat{A}^l_i = \delta^l_j$. Odtud dostáváme, že $\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{E}$, kde $\boldsymbol{E}$ je jednotková matice. Podobným způsobem bychom dokázali rovnost $\widehat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ a zjistili, že matice $\boldsymbol{A}$ a $\widehat{\boldsymbol{A}}$ jsou vůči sobě inverzní. Platí, že $\widehat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

Symbolem $(A^{-1})^i_j$ budeme značit prvek v matici $\boldsymbol{A}^{-1}$, který se nachází v i-tém řádku a j-tém sloupci.

Matice přechodu $\boldsymbol{A}$ od báze $\mathcal{M}$ k bázi $\mathcal{N}$ je regulární matice. Jsou-li dány v prostoru $\mathcal{V}$ báze $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$, je snadné matici $\boldsymbol{A}$ určit řešením systému soustav lineárních rovnic. Je-li naopak dána matice přechodu $\boldsymbol{A}$ (může se jednat o libovolnou regulární matici řádu n) a známe-li bázi $\mathcal{M}$, umíme ze vztahu (4.1) dopočítat vektory báze $\mathcal{N}$. Takto „přecházíme“ od báze $\mathcal{M}$ k bázi $\mathcal{N}$ pomocí matice $\boldsymbol{A}$ a právě proto hovoříme o matici $\boldsymbol{A}$ jako o matici přechodu.

Podobným přístupem můžeme studovat transformační vlastnosti lineárních forem. Následující odstavce zestručněme pouze na poznatky, které využijeme při odvození pravidla pro transformaci souřadnic libovolného tenzoru typu (p, q).

Nechť $\mathcal{M}^* = \{f^1, \ldots, f^n\}$ a $\mathcal{N}^* = \{g^1, \ldots, g^n\}$ jsou dvě báze duálního vektorového prostoru $\mathcal{V}^*$, které jsou duální k bázím $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ z prostoru $\mathcal{V}$. Nechť $\boldsymbol{B} = (B^i_j)$ je regulární matice řádu n nad tělesem $\mathbb{K}$ a platí

$$f^j = \sum_{i=1}^{n} B_i^j g^i, \quad j \in \{1, \dots, n\}. \tag{4.3}$$

Zdůrazněme, že nikoliv $\boldsymbol{B}$, ale matice $\boldsymbol{B}^T$ je maticí přechodu od báze $\mathcal{N}^*$ k bázi $\mathcal{M}^*$ (ve vztahu (4.3) sčítáme přes sloupcový index).

Podstatné pro další úvahy je nalézt vztah matice $\boldsymbol{B}$ k zavedené matici $\boldsymbol{A}$. Vyjděme z lemmatu 4 o duální bázi a pišme

$$\begin{aligned}\delta_k^j = f^j(\boldsymbol{v}_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} B_i^j g^i\right)\left(\sum_{l=1}^{n}(A^{-1})_k^l \boldsymbol{w}_l\right) &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(A^{-1})_k^l B_i^j g^i(\boldsymbol{w}_l) = \\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(A^{-1})_k^l B_i^j \delta_l^i = \sum_{i=1}^{n}(A^{-1})_k^i B_i^j.\end{aligned}$$

Odtud dostáváme rovnost $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$ ze které odvozujeme, že $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$. Vztah (4.3) můžeme proto přepsat do tvaru

$$f^j = \sum_{i=1}^{n} A_i^j g^i, \quad j \in \{1, \dots, n\} \tag{4.4}$$

a díky tomu máme veškeré informace potřebné k odvození pravidla pro transformaci souřadnic libovolného tenzoru typu (p, q).

Poznámka 14 (O matici přechodu). V literatuře lze nalézt hned několik způsobů, jakými se matice přechodu od báze $\mathcal{M}$ k bázi $\mathcal{N}$ zavádějí. Při studiu textů tenzorové algebry a analýzy je důležité se v prvním přiblížení seznámit s definicí matice přechodu konkrétního autora.

Je kupříkladu podstatné, zda ten či onen autor zapisuje souřadnice vektorů do sloupečků (jako tomu činíme my), nebo do řádků (jak se zapisují souřadnice vektorů na střední škole). Analogicky pro zápis souřadnic lineárních forem.

V této práci jsme zvolili přístup, který je v dostupné literatuře tenzorové algebry nejčastější. Pro doplnění poznamenejme, že druhým způsobem je definovat matici přechodu od báze $\mathcal{M}$ k bázi $\mathcal{N}$ jako matici, pomocí které lze od souřadnic vektoru vzhledem k bázi $\mathcal{M}$ přejít k souřadnicím tohoto vektoru vzhledem k bázi $\mathcal{N}$ (viz [**23**, s. 127]). Tento přístup lze obhajovat čistě z algebraického hlediska, neboť taková matice je maticí identického automorfismu na prostoru $\mathcal{V}$ vzhledem k bázím $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$.

Lze ukázat, že oba zmíněné přístupy jsou v jistém smyslu navzájem inverzní. Jestliže za matici přechodu od báze $\mathcal{M}$ k bázi $\mathcal{N}$ zvolíme matici $\boldsymbol{A}$ definovanou vztahem (4.1), pak pomocí matice k ní inverzní (to jest matice přechodu od báze $\mathcal{N}$ k bázi $\mathcal{M}$) můžeme vyjádřit vektor daný souřadnicemi vzhledem k bázi $\mathcal{M}$ v souřadnicích vzhledem k bázi $\mathcal{N}$. Budeme-li maticí přechodu od báze $\mathcal{M}$ k bázi $\mathcal{N}$ mínit matici $\boldsymbol{A}$, pomocí které transformujeme souřadnice vektoru vůči jedné bázi vzhledem ke druhé (jedná se o matici identického automorfismu na prostoru $\mathcal{V}$), pak pomocí matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ vyjádříme vektory báze $\mathcal{N}$ jako lineární kombinace vektorů báze $\mathcal{M}$.

2. Transformace souřadnic tenzoru při změně báze

Nechť tenzor $\boldsymbol{T} \in T_p^q(\mathcal{V})$ je určen svými souřadnicemi $T_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}$ vzhledem k bázi $\mathcal{M}$. Souřadnice tenzoru $\boldsymbol{T}$ vzhledem k bázi $\mathcal{N}$ ($\overline{T}_{k_1\dots k_p}^{l_1\dots l_q}$) lze určit přímo s využitím multilinearity tenzorového součinu a odvozených vztahů (4.2) a (4.4) pro transformace vektorů a lineárních forem. Všechny indexy postupně nabývají všech hodnot z množiny $\{1,\dots,n\}$. Postupnými úpravami dostáváme

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T} = &\sum_{\substack{j_1,\dots,j_q\\ i_1,\dots,i_p}} T_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q} f^{i_1}\otimes\dots\otimes f^{i_p}\otimes \boldsymbol{v}_{j_1}\otimes\dots\otimes \boldsymbol{v}_{j_q} = \\
&= \sum_{\substack{j_1,\dots,j_q\\ i_1,\dots,i_p}} T_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}\left(\sum_{k_1} A_{k_1}^{i_1} g^{k_1}\right)\otimes\dots\otimes\left(\sum_{k_p} A_{k_p}^{i_p} g^{k_p}\right)\otimes \\
&\quad \otimes\left(\sum_{l_1}(A^{-1})_{j_1}^{l_1}\boldsymbol{w}_{l_1}\right)\otimes\dots\otimes\left(\sum_{l_q}(A^{-1})_{j_q}^{l_q}\boldsymbol{w}_{l_q}\right) = \\
= &\sum_{\substack{l_1,\dots l_q\\ k_1,\dots,k_p}} \underbrace{\left(\sum_{\substack{j_1,\dots,j_q\\ i_1,\dots,i_p}} A_{k_1}^{i_1}\dots A_{k_p}^{i_p}(A^{-1})_{j_1}^{l_1}\dots(A^{-1})_{j_q}^{l_q} T_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}\right)}_{\overline{T}_{k_1\dots k_p}^{l_1\dots l_q}} g^{k_1}\otimes\dots\otimes g^{k_p}\otimes\boldsymbol{w}_{l_1}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{w}_{l_q}.
\end{aligned}
$$

Pro transformaci souřadnic tenzoru z jedné báze do druhé odvozujeme pravidlo

$$
\overline{T}_{k_1\dots k_p}^{l_1\dots l_q} = \sum_{\substack{j_1,\dots,j_q\\ i_1,\dots,i_p}} A_{k_1}^{i_1}\dots A_{k_p}^{i_p}(A^{-1})_{j_1}^{l_1}\dots(A^{-1})_{j_q}^{l_q} T_{i_1\dots i_p}^{j_1\dots j_q}, \tag{4.5}
$$

které je stěžejní pro tzv. analytickou definici tenzoru, již nyní uvedeme.

Definice 10 (Analytická definice tenzoru)**.** Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$, $\dim\mathcal{V} = n$ a $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ jsou jeho dvě báze. Soubor n^{p+q} hodnot nazveme *p-krát kovariantním* a *q-krát kontravariantním* tenzorem (tenzorem typu (p,q)), jestliže se tyto hodnoty transformují při přechodu od báze $\mathcal{M}$ k bázi $\mathcal{N}$ podle předpisu (4.5).

Slova kovariantní a kontravariantní vycházejí z transformačních vlastností vektorů a kovektorů. Souřadnice vektorů se podle (4.5) transformují pomocí inverzní matice k matici přechodu od báze $\mathcal{M}$ k bázi $\mathcal{N}$ a proto se transformují kontravariantně. Naproti tomu souřadnice lineárních forem se transformují přímo pomocí matice přechodu, tedy kovariantně. Nutno poznamenat, že toto označení je závislé na použité definici matice přechodu.

Předložená definice slouží především pro potřeby technické praxe. V jednoduchosti řečeno, pokud provedeme měření určité veličiny v jedné referenční soustavě a toto měření zopakujeme v jiné referenční soustavě, nazveme tuto veličinu tenzorem, budou-li její hodnoty při přechodu z jedné referenční soustavy do druhé svázány vztahem (4.5).

Na úplný závěr demonstrujme výpočet souřadnic tenzoru na jednoduchém motivačním příkladu.

Příklad 11. Nechť $\boldsymbol{T} \in T_2^1(\mathcal{V})$ je dvakrát kovariantní a jednou kontravariantní tenzor, $\dim \mathcal{V} = 2$. Tenzor $\boldsymbol{T}$ má vzhledem k bázi $\mathcal{M} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ ($\mathcal{M}^* = \{f^1, f^2\}$) souřadnice

$$(T_{ij}^1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (T_{ij}^2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určeme souřadnici $\overline{T}_{21}^2$ tenzoru $\boldsymbol{T}$ vzhledem k bázi $\mathcal{N} = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ ($\mathcal{N}^* = \{g^1, g^2\}$), jestliže matice přechodu od báze $\mathcal{M}$ k bázi $\mathcal{N}$ je

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice k matici $\boldsymbol{A}$ je matice

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Použitím vztahu (4.5) pro transformaci souřadnic tenzorů dostáváme

$$\overline{T}_{21}^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} A_2^i A_1^j (A^{-1})_k^2 T_{ij}^k.$$

Protože souřadnice tenzoru $\boldsymbol{T}$ vzhledem k bázi $\mathcal{M}$ jsou nenulové pouze v případech $T_{21}^1 = 1$, $T_{12}^2 = 2$ a $T_{21}^2 = 3$, platí pro souřadnici $\overline{T}_{21}^2$

$$\overline{T}_{21}^2 = A_2^2 A_1^1 (A^{-1})_1^2 T_{21}^1 + A_2^1 A_1^2 (A^{-1})_2^2 T_{12}^2 + A_2^2 A_1^1 (A^{-1})_2^2 T_{21}^2.$$

Dosazením dostáváme

$$\overline{T}_{21}^2 = (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = -1 - 4 - 3 = -8.$$

Souřadnice $\overline{T}_{21}^2$ tenzoru $\boldsymbol{T}$ vzhledem k bázi $\mathcal{N}$ je $\overline{T}_{21}^2 = -8$. Podobným způsobem jsme schopni určit ostatní souřadnice tohoto tenzoru vzhledem k bázi $\mathcal{N}$.

Závěr

V úvodu bakalářské práce jsme vymezili několik hlavních cílů. Proveďme nyní jejich krátké zhodnocení.

Poměrně problematická se při psaní bakalářské práce stala první kapitola *Historický vývoj tenzorového počtu*. Vzhledem k tomu, že se autorovi práce nepodařilo dohledat ucelený přehled historického vývoje, bylo nutné vycházet z kusých informací uvedených v mnoha publikacích. V některých případech se tyto informace navzájem nepodporovaly. Často proto bylo nutné vycházet z originálních textů, což bezpochyby přispělo ke zkvalitnění práce. Tím lze také vysvětlit rozsáhlý aparát literatury, který byl při řešení bakalářského projektu použit.

Byť druhá kapitola *Algebraický úvod do studia tenzorového počtu* měla pouze zavést značení a používanou terminologii, byly zde popsány dva přístupy k pojmu formální lineární obal. Autor práce podal důkaz o jejich vzájemné zaměnitelnosti.

Ve třetí kapitole *Tenzorové součiny vektorových prostorů* jsme v důkazu věty o linearizaci bilineárního zobrazení, který byl autorem práce podrobně zpracován, provedli konstrukci tenzorového součinu dvou vektorových prostorů. Následně byl tenzorový součin dvou vektorových prostorů rozšířen na tenzorový součin konečného systému vektorových prostorů. V téže kapitole jsme diskutovali konstrukce alternativní a rovněž zavedli pojem tenzor typu (p, q).

Tenzor byl v této kapitole definován jednak jako prvek tenzorového součinu $T_p^q(\mathcal{V})$ a jednak jako multilineární forma z prostoru $\mathscr{L}(\mathcal{V} \times \ldots \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}^* \times \ldots \times \mathcal{V}^*, \mathbb{K})$ (v kartézském součinu se vektorový prostor $\mathcal{V}$ vyskytuje právě p-krát; prostor k němu duální $\mathcal{V}^*$ právě q-krát). Odvození druhého pojetí z prvního je popsáno na straně 54.

V závěru třetí kapitoly jsme zavedli základní operace s tenzory. Postupně se jednalo o sčítání tenzorů a násobení tenzoru skalárem, násobení dvou tenzorů a kontrakci tenzoru.

Poslední kapitola *Tenzory v souřadnicích* se zaměřila na transformační vlastnosti souřadnic tenzoru při změně báze. Odvodili jsme pravidlo pro transformaci souřadnic libovolného tenzoru typu (p, q), které jsme následně využili k formulaci analytické definice tenzoru.

Text bakalářské práce je doprovázen motivačními příklady z multilineární algebry, které podle autora přispívají k lepšímu porozumění dané problematiky.

Literatura

[1] HAMILTON, William Rowan. *Lectures on quaternions: containing a systematic statement of a new mathematical method, of which the principles were communicated in 1843 to the Royal Irish academy, and which has since formed the subject of successive courses of lectures, delivered in 1848 and subsequent years, in the halls of Trinity college, Dublin* [online]. Dublin: Hodges and Smith, 1853 [cit. 2014-01-28]. Dostupné z: `https://archive.org/details/lecturesonquater00hami`

[2] HACKBUSCH, Wolfgang. *Tensor spaces and numerical tensor calculus.* New York: Springer, 2012, xviii, 662 s. ISBN 978-364-2280-269.

[3] ABŁAMOWICZ, Rafał a Pertti LOUNESTO. *Clifford algebras and spinor structures: a special volume dedicated to the memory of Albert Crumeyrolle* (1919-1992). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, c1995, xx, 421 s. ISBN 0-7923-3366-7.

[4] GIBBS, Josiah Willard. *Elements of Vector Analysis Arranged for the Use of Students in Physics* [online]. New Haven: Printed by Tuttle, Morehouse & Taylor, 1884 [cit. 2014-01-28]. Dostupné z: `https://archive.org/details/elementsvectora00gibbgoog`

[5] CONRAD, Keith. *Tensor products.* 2012. Dostupné z: `http://www.math.uconn.edu/~kconrad/`

[6] WILSON, Edwin Bidwell. *Vector Analysis: A Text Book for the Use of Students of Mathematics and Physics and Founded upon the Lectures of J. Willard Gibbs* [online]. New Haven: Yale University Press, 1901 [cit. 2014-01-27]. Dostupné z: `http://www.archive.org/details/117714283`

[7] GRATTAN-GUINESS, Ivor. *Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences.* 1. publ. Baltimore: Johns Hopkins Press, 2003, xiv, 842 s. ISBN 0-8018-7396-7.

[8] KUCHAŘ, Karel. *Základy obecné teorie relativity.* 1. vyd. Praha: Academia, 1968, 252 s.

[9] DIMITRIENKO, Yu. *Tensor analysis and nonlinear tensor functions.* Boston: Kluwer Academic Publishers, c2002, xviii, 662 s. ISBN 1-4020-1015-X.

[10] RICCI-CURBASTRO, Gregorio a Tullio LEVI-CIVITA. Méthodes de calcul différentiel absolu. *Mathematische Annalen* [online]. [cit. 2014-02-04]. Leipzig: B. G. Teubner, 1901, č. 54, s. 125-201. Dostupné z: `http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0054`

[11] ŠOLCOVÁ, Alena a Michal KŘÍŽEK. Čas plyne, jméno zůstává: Albert Einstein. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie.* 1998, roč. 43, č. 4, s. 265-277. ISSN: 0032-2423. Dostupné z: `http://hdl.handle.net/10338.dmlcz/139743`

[12] BOURBAKI, Nicolas. *Elements of the history of mathematics.* Berlin: Springer, c1994, viii, 301 s. ISBN 3-540-19376-6.

[13] BEČVÁŘ, Jindřich. *Z historie lineární algebry.* 1. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007, 519 s. ISBN 978-80-7378-036-4.

[14] KLEINER, Israel. *A history of abstract algebra.* Boston: Birkhauser, c2007, xiii, 168 s. ISBN 978-0-8176-4684-4.

[15] WHITNEY, Hassler, Domingo TOLEDO a James EELLS. *Collected papers.* Boston: Birkhäuser, 1992, xiv, 596 s. ISBN 0-8176-3559-92.

[16] ROBSON, ELEANOR A JACQUELINE A STEDALL. *The Oxford handbook of the history of mathematics.* 1st pub. Oxford: Oxford University Press, 2009, vii, 918 s. ISBN 978-0-19-921312-2.

[17] BOS, H. *Lectures in the history of mathematics.* Providence: American Mathematical Society, c1993, x, 197 s. ISBN 0-8218-0920-2.

[18] BOURBAKI, NICOLAS. *Algebra.* Berlin: Springer, 1989, xxiii, 708 s. Elements of mathematics. ISBN 3-540-64243-9.

[19] GREUB, WERNER HILDBERT. *Multilinear algebra.* Berlin: Springer, 1967, x, 224 s.

[20] YOKONUMA, TAKEO. *Tensor spaces and exterior algebra.* Providence: American Mathematical Society, 1992, x, 131 s. ISBN 0-8218-4564-0.

[21] MOTL, LUBOŠ A MILOŠ ZAHRADNÍK. *Pěstujeme lineární algebru.* 3.vyd. Praha: Karolinum, 2002, 348 s. ISBN 80-246-0421-3.

[22] GREUB, WERNER HILDBERT. *Linear algebra.* 4th ed. New York: Springer, 1981, xvi, 451 s. ISBN 0-387-90110-8.

[23] BEČVÁŘ, JINDŘICH. *Lineární algebra.* Vyd. 3. Praha: Matfyzpress, 2005, 435 s. ISBN 80-86732-57-6.

[24] BICAN, LADISLAV. *Lineární algebra a geometrie.* Vyd. 2. Praha: Academia, 2009, 303 s. ISBN 978-80-200-1707-9.

[25] HORSKÝ, ZDENĚK. *Vektorové prostory.* Matematika pro vysoké školy technické, sešit II. 1. vyd. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1970, 88 s.

[26] ČADEK, MARTIN. *Lineární algebra a geometrie III.* Brno, 2003, 77 s. Dostupné z: `http://www.math.muni.cz/~cadek/la3.html`

[27] ŠMÍD, DALIBOR. *Zápisek třetí o tenzorech.* Praha, 2011, 16 s. Dostupné z: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~smid/`

[28] STANOVSKÝ, DAVID. *Základy algebry.* 1. vyd. Praha: Matfyzpress, 2010, 153 s. ISBN 978-80-7378-105-7.

[29] TRÁVNÍČEK, STANISLAV. Faktorové prostory. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie.* Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1969, roč. 14, č. 6. ISSN 0032-2423. Dostupné z: `http://dml.cz/dmlcz/139300`

[30] BLAŽEK, JAROSLAV, MILAN KOMAN A BLANKA KUSSOVÁ. *Algebra a teoretická aritmetika.* 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983, 96 s.

[31] SKOUFRANIS, PAUL. *Quotients of Vector Spaces.* 2012. Dostupné z: `http://www.math.ucla.edu/~pskoufra/`

[32] PODOLSKÝ, JIŘÍ. *Teoretická mechanika v jazyce diferenciální geometrie.* Praha, 2006, 64 s. Studijní text k předmětu Proseminář teoretické fyziky I. [online]. [cit. 2013-12-31]. Dostupné z: `http://utf.mff.cuni.cz/vyuka/TMF069/`

[33] CONRAD, BRIAN. *Math 396. Quatient spaces.* 9 s. Dostupné z: `http://math.stanford.edu/~conrad/`

[34] PURBHOO, KEVIN. *Notes on Tensor Products and the Exterior Algebra For Math 245.* 2012. Dostupné z: `http://www.math.uwaterloo.ca/~kpurbhoo/`

[35] MAC LANE, SAUNDERS A GARRETT BIRKHOFF. *Algebra.* 2. vyd. Bratislava: Alfa, 1974, 662 s.

[36] ZLATOŠ, PAVOL. *Lineárna algebra a geometria: cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov.* 1. vyd. Bratislava: Marenčin PT, c2011, 741 s. ISBN 978-80-8114-111-9.

[37] MCLEMAN, CAM. Free vector space over a set. *PlanetMath* [online]. [cit. 2013-09-28]. Dostupné z: `http://planetmath.org/freevectorspaceoveraset`

[38] KILČEVSKIJ, NIKOLAJ ALEKSANDROVIČ. *Základy tensorového počtu a jeho použití v mechanice.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1956, 146 s.

[39] REKTORYS, Karel. *Přehled užité matematiky I.* 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000, xxxii, 720 s. ISBN 80- 7196-179-5.

[40] KVASNICA, Jozef. *Matematický aparát fyziky.* 1. vyd. Praha: Academia, 1989, 383 s. ISBN 80-200-0088-7.

[41] BARTOŇ, Stanislav a Jan HORSKÝ. *Relativistický vesmír.* Brno: Ando Publishing, 1997, 182 s. ISBN 80-86047-15-6.

[42] KVASNICA, Jozef, Antonín HAVRÁNEK, Pavel LUKÁČ a Boris SPRUŠIL. *Mechanika.* 2. vyd. Praha: Academia, 2004, 476 s. ISBN 80-200-1268-0.

[43] NEARING, James C. *Mathematical tools for physics.* Dover ed. Mineola, N.Y.: Dover Publications, c2010, viii, 485 p. ISBN 04-864-8212-X.

[44] BOČEK, Leo. *Tensorový počet.* 1. vyd. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1976, 150 s.

[45] BAŠTA, Alfons. *Aplikovaná matematika. 1.* vyd. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1978, s. 1143-2382.

[46] NORTHCOTT, D. *Multilinear algebra.* New York: Cambridge University Press, 1984, x, 198 s. ISBN 05-212-6269-0.

[47] VOTRUBA, Václav. *Základy speciální teorie relativity.* 2. vyd. Praha: Academia, 1977, 437 s.